UNIVERSITÄT LEIPZIG

Methoden der Theorie monotoner Operatoren und ihre Anwendungen auf Integral- und Integro-Differenzialgleichungen

Diplomarbeit

Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität Leipzig

Leipzig, Juni 2009

von	**Konrad Simon**
geboren am	**17. Dezember 1983 in Magdeburg**
Betreuer:	**Prof. Dr. Matthias Günther**

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit behandelt nichtlineare Integral- und Integro-Differenzialgleichungen in Räumen integrierbarer Funktionen. Mit Hilfe der Theorie monotoner Operatoren in Banachräumen werden dort Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen abgeleitet. Die dafür benötigten Resultate werden bereitgestellt.

Danksagungen

Meinen besonderen Dank möchte ich an dieser Stelle meinem Betreuer, Herrn Prof. Dr. Matthias Günther, aussprechen. Er hatte stets ein offenes Ohr für meine kleineren und größeren Probleme und war stets bemüht mich auf die wesentlichen Punkte hinzuweisen und mich auf deren Wahrnehmung zu sensibilisieren.

Nicht zuletzt gilt mein Dank meiner lieben Familie, insbesondere meinen Eltern, deren weitreichende Unterstützung mein Studium und damit auch diese Diplomarbeit erst ermöglichten.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Existenztheorie von Lösungen einer speziellen Klasse nichtlinearer Integral- und Integro-Differenzialgleichungen. Dies sind Gleichungen unbekannter Funktionen, die in irgend einer Form ein Integral der gesuchten Funktion beziehungsweise zusätzlich eine Ableitung dieser Funktion enthalten. Zielstellung dieser Diplomarbeit war es aus der Literatur bekannte Resultate weitestgehend auszuarbeiten und in eine übersichtliche Darstellung zu bringen. Wir orientieren uns hierbei an [22].

Integral- und Integro-Differenzialgleichungen treten mannigfach in der Physik und den Ingenieurwissenschaften auf. Insbesondere seien an dieser Stelle die Elastizitätstheorie und die Theorie des tragenden Flügels genannt. Für die wichtigsten Gleichungen der letztgenannten Theorie werden wir in dieser Arbeit Existenz- und Eindeutigkeitsresultate geben. Bekannt sind im Kontext dieser Theorie die so genannte *Zirkulationsgleichung* oder auch *Grundgleichung der schlanken Profile* (als Profile werden senkrechten Schnitte durch einen Tragfügel bezeichnet, die parallel zu einer frontalen Anströmrichtung verlaufen)

$$\frac{1}{4\pi v}\int_{-a}^{a}\frac{\Gamma'(y)}{x-y}\,\mathrm{d}y=\psi(x)$$

und die Gleichung zur Bestimmung der Zirkulationsverteilung

$$\frac{\Gamma(x)}{v\pi l(x)}+\frac{1}{4\pi v}\int_{-a}^{a}\frac{\Gamma'(y)}{x-y}\,\mathrm{d}y=\varphi(x)\ .$$

Man nennt dabei $l(x)$ die Tiefenverteilung des Tragflügels und Γ die gesuchte Zirkulationsverteilung. Die gegeben Funktionen ψ beziehungsweise φ sind Größen, die mit dem Anstellwinkel des Tragflügels verknüpft sind und v bezeichnet eine Geschwindigkeitsgröße. Diese physikalischen Größen sind bis auf die gesuchte Zirkulationsverteilung alle samt bekannt. Sie zu finden ist die so genannte „Nachrechnungsaufgabe“ der Tragflügeltheorie. Letztere der beiden Gleichungen wurde im Jahr 1918 von L. Prandtl[1] angegeben und heißt daher und auf Grund ihrer Bedeutung auch *Grundgleichung der Prandtlschen Tragflügeltheorie*. Detailreichere Darstellungen dieser Thematik finden sich z.B. in [12] und [18].

[1]Ludwig Prandtl, geb. 4. Februar 1875 in Freising, war ein deutscher Ingenieur und Physiker. Er lieferte am Anfang des 20. Jahrhunderts bedeutende Beiträge zur Strömungsmechanik und entwickelte die Tragflügeltheorie, die den Bau von Flugzeugen maßgeblich beeinflusste. Er war ab 1904 Professor in Göttingen und später Leiter der dortigen Aerodynamischen Versuchsanstalt. Im Jahr 1908 baute er dort den ersten Windkanal in Deutschland. Von 1925 bis 1946 war er der Leiter des Kaiser-Wilhelm-Institutes für Strömungsforschung. Er starb am 15. August 1953 in Göttingen.

Lineare Integral- und Integro-Differenzialgleichungen der obigen Bauart wurden bereits vielfach untersucht (z.B. [17], [16]). Da der Integralkern, im obigen Falle $c(x, y) = (y-x)^{-1}$, jedoch eine (starke) Singularität aufweist, existiert dieses im Sinne des uneigentlichen Integrals im Allgemeinen nicht, sondern muss als Integral im Cauchyschen Hauptwert verstanden werden. Operatoren dieser Art werden singuläre Integraloperatoren genannt und können z.B. in Lebesgueschen Räumen und Räumen Hölderstetiger Funktionen untersucht werden, wie dies zum Beispiel in den Monographien [11] und [10] ausführlich dargestellt ist. Unser Hauptaugenmerk wird sich in dieser Arbeit auf singuläre Integraloperatoren in reellen Räumen L^p konzentrieren, die mit einer geeigneten Gewichtsfunktion ϱ versehen sind. Die Einführung eines solchen Gewichtes trägt gewissermaßen einem besonderen Verhalten der Lösung einer Cauchyschen singulären Integralgleichung in den Randpunkten des betrachteten Intervalls (in dieser Arbeit $I = [-a, a]$) Rechnung. Dass dabei diesem Raum im Fall des Cauchyschen Integralkerns das Intervall $|x| \leqslant a$ zu Grunde liegt, ist keine Einschränkung, da jedes andere Intervall $[b, c] \subset \mathbb{R}$ durch eine lineare Substitution in eben dieses überführt werden kann. Es werden neben dem singulären Integral mit Cauchy-Kern auch die Hilbert-Transformation und das singuläre Integral mit dem Kotangens-Kern betrachtet. Ferner kann man Integro-Differenzialgleichungen bekanntlich als Randwertaufgaben behandeln. Beipsielsweise würde eine Nullrandbedingung im Fall der obigen Prandtlschen Grundgleichung gerade Zirkulationsfreiheit der Lösung in den Randpunkten bedeuten, d.h.

$$\Gamma(-a) = \Gamma(a) = 0 .$$

Das Aufkommen der Theorie monotoner Operatoren in den sechziger Jahren des letzten Jahrhunderts lieferte nun neue Ansätze, um gewisse nichtlineare Verallgemeinerungen linearer Integral- und Integro-Differenzialgleichungen zu betrachten. Einige Aspekte der Anwendung monotoner Operatoren sollen hier dargestellt werden.

Im **Kapitel 1** geben wir, im Rahmen dieser Arbeit, benutzte Standardresultate der linearen Funktionalanalysis, der Maßtheorie und die benutzten Funktionenraüme an. Ferner geben wir einen Beweis für den Hauptsatz monotoner Operatoren von G. Minty und F. Browder. Eine Adaption der Beweismethoden dieses Theorems lässt dabei eine Verallgemeinerung auf die Klasse der pseudomonotonen Operatoren zu, wobei der Beweis hier nicht geführt wird, da er sich der selben Methoden bedient, wie der Beweis des Hauptsatzes monotoner Operatoren. Als wesentlicher Punkt dieses Beweises zeigt sich dabei das folgende Prinzip:

Monotonie (beziehungsweise Pseudomonotonie) und Koerzivität sichern eine Apriori-Abschätzung. Monotonie (beziehungsweise Pseudomonotonie) und Stetigkeitsbegriffe implizieren eine Möglichkeit des Grenzübergangs von den endlichdimensionalen Problemen zum Unendlichdimensionalen.

Des Weiteren wird ein kurzer Überblick über die Theorie maximal monotoner Operatoren in reflexiven Banachräumen gegeben. Dabei werden einige Eigenschaften bewiesen und wichtige Beispiele vorgestellt. Insbesondere wird das Konzept des Subdifferenzials eines (nichtlinearen) Funktionals auf einem Banachraum X kurz dargestellt. Die wichtigsten Hauptsätze (Satz von Rockafellar, Hauptsatz maximal monotoner Operatoren) werden ohne Beweis zitiert.

Kapitel 2 behandelt die oben bereits genannten singulären Integraloperatoren und die gewichteten L^p-Räume sowie die Darstellung ihrer Dualräume. Ausgehend von der Beschränktheit dieser Operatoren im ungewichteten Raum L^p wird die Beschränktheit im gewichteten L^p-Raum bewiesen und es wird unter anderem mit Hilfe von Einbettungssätzen der L^p-Räume mit Gewicht die Monotonie der singulären Integrale gezeigt. Es werden auch Inversionsformeln gegeben.

Im **Kapitel 3** wenden wir uns den nichtlinearen Integralgleichungen zu. Dazu wird zuerst der Nemickii-Operator im gewichteten L^p vorgestellt, welcher in einem gewissen Sinne eine natürliche Verallgemeinerung von Multiplikationsoperatoren darstellen, und es werden hinreichende Bedingungen angegeben, um metrische Eigenschaften sowie (stikte) Monotonie oder Koerzivität sicher zu stellen. Ausgehend davon wird ein Existenz- und Eindeutigkeitsresultat für eine Hammersteinsche Gleichung bewiesen, woraus sofort analoge Resultate für Hammersteinsche Gleichungen, die singuläre Integrale involvieren, abgeleitet werden können. Im zweiten Abschnitt wird eine Integralgleichung mit einem stärker nichtlinearen Term, nämlich einem Nemickii-Operator ohne Wachstumsbedingung mit Hilfe der Theorie maximal monotoner Operatoren behandelt. Daraus werden wiederum unter Zuhilfenahme von Inversionsformeln singulärer Integrale Folgerungen für entsprechende Hammersteinsche Gleichungen mit stärkeren Nichtlinearitäten abgeleitet.

Zu guter Letzt widmen wir uns im **Kapitel 4** einigen, die benannten Gleichungen der Tragflügeltheorie verallgemeinernden, Integro-Differenzialgleichungen und erhalten ebenfalls Existenz- und Eindeutigkeitsresultate. Insbesondere erhalten wir für den Prandtlschen Integro-Differenzialoperator

$$(Tu)(x) := -\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a} \frac{u'(y)}{y-x}\,\mathrm{d}y$$

auf geeigneten Definitionsbereichen die starke Monotonie (also auch die Koerzivität) mit Hilfe der Ungleichung von Schleiff. Daraus beweisen wir die Lösbarkeit von nichtlinearen Integro-Differenzialgleichungen unter Nullrandbedingungen, die sowohl T, als auch einen einzelnen Ableitungsoperator (erster Ordnung) enthalten. Ein derartiges Resultat bleibt auch Räumen gültig, in denen die Ungleichung von Schleiff nicht mehr gilt, jedoch muss dann zusätzlich eine Koerzivitätsforderung an mindestens einen der übrigen Operatoren, die in der Gleichung auftreten, gestellt werden. Ein solches Resultat soll zum Abschluss dieser Arbeit zumindest angegeben werden.

1 Grundlagen

1.1 Notationen, Standardresultate und Funktionenräume

Intention dieses Abschnittes ist es wichtige Resultate der Maß- und Integrationstheorie, der Funktionalanalysis wiederzugeben, welche in dieser Arbeit benötigt werden um in den geführten Beweisen die Argumentation in einer deutlich nachzuvollziehenden Linie darzustellen. Des Weiteren werden wir bemüht sein, die in der Standardliteratur verwendeten Notationen nur dann abzuändern, sollte sich dies im Rahmen dieser Arbeit als unvermeidbar oder (wesentlich) günstiger erweisen.

In dieser Arbeit werden wir es ausschließlich mit reellen Banachräumen zu tun haben, daher werden wir die wichtigen Sätze auch in eben dieser Weise darstellen, auch wenn diese im Fall eines komplexen Banachraumes ihre Gültigkeit behalten sollten.

Notation 1.1.1. *Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein reeller Banachraum. Der Raum X^* bezeichne den **stetigen Daulraum** von X, d.h. den Raum der stetigen linearen Funktionale $\varphi : X \to \mathbb{R}$. Mit der Norm*

$$\|\varphi\|_{X^*} = \sup_{\substack{\|x\|_X = 1 \\ x \in X}} |\langle \varphi, x \rangle_X|$$

*wird X^* selbst zu einem Banachraum über $\mathbb{R}$. Hierbei bezeichnet $\langle \varphi, x \rangle_X := \varphi(x)$ die **Dualitätspaarung** von $X^* \times X$ nach $\mathbb{R}$. Sind Verwechelungen ausgeschlossen, so werden wir auch einfach $\|\cdot\|$ für die Norm in X^* beziehungsweise $\langle \cdot, \cdot \rangle$ anstatt $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$ schreiben.*

Im Falle eines Hilbertraumes X besagt der zweite Satz von Riesz, dass X isometrisch isomorph zu X^* ist. Die Dualitätspaarung geht dann in das Skalarprodukt des Hilbertraumes über. Mit dem Bachraum X^* definiert man nun den Bidualraum von X als $X^{**} := (X^*)^*$. Vermöge der Abbildung $J : X \to X^{**}$, gemäß $(Jx)(\varphi) := \langle Jx, \varphi \rangle_{X^*} := \langle \varphi, x \rangle_X$, kann man X nun mit einem abgeschlossenen Teilraum von X^{**} identifizieren. J wird demnach auch **kanonische Isometrie** genannt, was wiederum die Definition verschiedener Arten der Konvergenz rechtfertigt.

Notation 1.1.2. *Seien (x_n) eine Folge im Banachraum X und (φ_n) eine Folge in X^*.*

*(i) Ist die Folge (x_n) **schwach konvergent** gegen $x \in X$, d.h. $\langle \varphi, x_n \rangle_X \to \langle \varphi, x \rangle_X$ für alle $\varphi \in X^*$, so schreiben wir $x_n \rightharpoonup x$.*

*(ii) Ist (φ_n) **$*$-schwach konvergent** gegen $\varphi \in X^*$, d.h. $\langle \varphi_n, x \rangle_X \to \langle \varphi, x \rangle_X$ für alle $x \in X$, so schreiben wir $\varphi_n \overset{*}{\rightharpoonup} \varphi$.*

Man beachte dabei, dass mit der schwachen Konvergenz in X automatisch die schwache Konvergenz in X^* definiert ist. Weiter sieht man sofort ein, dass die schwache Konvergenz in X^* eine stärkere Forderung darstellt, als die der $*$-schwachen Konvergenz.

Eine besondere Klasse unter den Banachräumen bilden die reflexiven Räume, denn sie sind den Hilberträumen gewissermaßen am ähnlichsten. Dabei nennen wir einen Banachraum **reflexiv**, wenn die kanonische Isometrie $J : X \to X^{**}$ surjektiv ist. Für reflexive Banachräume fallen daher die schwache Konvergenz im Dualraum und die $*$-schwache Konvergenz zusammen. Es gilt weiterhin der äußerst wichtige

Satz 1.1.3 (Eberlein-Šmulian). *Im reflexiven Banachraum besitzt jede beschränkte Folge eine schwach konvergente Teilfolge.*

Hilfssatz 1.1.4 (Konvergenzprinzipien im Banachraum). *Sei X ein Banachraum. Dann gelten:*

(i) Jede in X schwach konvergente Folge ist normbeschränkt.

(ii) Aus $x_n \rightharpoonup x$ in X und $f_n \to f$ in X^* folgt $\langle f_n, x_n \rangle_X \to \langle f, x \rangle_X$.

(iii) Aus $x_n \to x$ in X und $f_n \rightharpoonup f$ in X^* folgt $\langle f_n, x_n \rangle_X \to \langle f, x \rangle_X$.

(iv) Seien X zusätzlich reflexiv und (x_n) beschränkt. Konvergieren alle konvergenten Teilfolgen von (x_n) schwach gegen den selben Grenzwert x, so konvergiert bereits die ganze Folge schwach gegen x.

Beweis. (i) Wegen $x_n \rightharpoonup x$ in X ist die Folge $| \langle f, x_n \rangle_X |$ punktweise beschränkt, d.h.

$$\sup_n | \langle f, x_n \rangle_X | \leqslant C_f \ .$$

Bezeichnen wir mit J die kanonische Isometrie $X \to X^{**}$,

$$\langle Jx, f \rangle_{X^*} = \langle f, x \rangle_X \ ,$$

so erhalten wir

$$\sup_n | \langle Jx_n, f \rangle_{X^*} | = \sup_n | \langle f, x_n \rangle_X | \leqslant C_f \ .$$

Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit liefert dann

$$\sup_n \|Jx_n\|_{X^{**}} = \sup_n \|x_n\| \leqslant C$$

für ein $C > 0$.

(ii) Mit unseren Voraussetzungen und wegen *(i)* haben wir

$$\begin{aligned} |\langle f_n, x_n \rangle_X - \langle f, x \rangle_X| &\leqslant |\langle f_n - f, x \rangle_X| + |\langle f, x_n - x \rangle_X| \\ &\leqslant \|f_n - f\|_{X^*} \|x_n\| + |\langle f, x_n - x \rangle_X| \\ &\to 0 \ . \end{aligned}$$

Die Aussage (iii) folgt analog und unter der Benutzung der kanonischen Isometrie.

(iv) Angenommen (x_n) konvergiere nicht schwach gegen x. Dann gibt es eine Teilfolge (x_{n_k}), ein $f \in X^*$ und ein $\varepsilon > 0$ mit

$$|\langle f, x_{n_k} \rangle_X - \langle f, x \rangle_X| \geqslant \varepsilon \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Nun ist die Folge (x_{n_k}) nach Voraussetzung beschränkt und hat so nach dem Satz von Eberlein-Šmulian eine konvergente Teilfolge, die ebenfalls nach Voraussetzuung gegen x konvergiert. Dies ist ein Widerspruch. ■

Notation 1.1.5 (Lebesguesche Räume)**.** *Mit $L^p(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, bezeichnen wir, bei $1 \leqslant p < \infty$, die Menge der Äquivalenzklassen f.ü. gleicher Funktionen, der auf dem Maßraum $(\Omega, \mathcal{L}(\Omega), \lambda)$ messbaren, reellen, numerischen Funktionen, deren Betrag zur p-ten Potenz λ-integrierbar ist. $\mathcal{L}(\Omega)$ bezeichnet die Lebesguesche σ-Algebra und λ das Lebesgue-Maßes auf $\mathcal{L}(\Omega)$. Diese Räume, versehen mit der Norm*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, \mathrm{d}\lambda(x) \right)^{1/p} , \quad u \in L^p(\Omega) ,$$

sind Banachräume. Im Fall $p = \infty$ bezeichnen wir mit $L^\infty(\Omega)$, den Raum der auf X wesentlich beschränkten Funktionen, d.h.

$$L^\infty(\Omega) = \{ u : \Omega \to [-\infty, \infty] \mid u \textit{ ist messbar und} \, \exists \, C > 0 \textit{ mit} \, \lambda(\{|u| > C\}) = 0 \} \; .$$

Die Norm in $L^\infty(\Omega)$ ist definiert als

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} := \inf \{ C > 0 \mid \lambda(\{|u| > C\}) = 0 \}$$

und mit ihr ist auch $L^\infty(\Omega)$ ein Banachraum. Für $\mathrm{d}\lambda(x)$ schreiben wir im Allgeinen $\mathrm{d}x$.

Satz 1.1.6. *Sei $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Aus jeder in $L^p(\Omega)$ konvergenten Folge $f_n \to f$ lässt sich eine f.ü. punktweise gegen f konvergente Teilfolge auswählen. Im Raum $L^\infty(\Omega)$ konvergiert bereits die gesamte Folge f_n f.ü. punktweise gegen f.*

Satz 1.1.7. *Die Räume $L^p(\Omega)$ sind für $1 < p < \infty$ gleichmäßig konvex, d.h. für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für $f, g \in L^p(\Omega)$ mit $\|f\|_{L^p(\Omega)} = \|g\|_{L^p(\Omega)} = 1$ die Implikation*

$$\|f - g\|_{L^p(\Omega)} \geqslant \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \left\| \frac{1}{2}(f - g) \right\|_{L^p(\Omega)} \leqslant 1 - \delta$$

richtig ist. Insbesondere sind die Räume $L^p(\Omega)$ damit auch strikt konvex.

Eine Funktion $v : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt **absolut stetig**, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$\sum_{k=1}^n |v(b_k) - v(a_k)| < \varepsilon$$

für jede Familie disjunkter Teilintervalle $[a_k, b_k]$, $k = 1, \ldots, n$, von $[a, b]$ mit Gesamtlänge $\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta$.

Notation 1.1.8. *Den Vektorraum der absolut stetigen Funktionen auf dem Intervall* $[a, b]$ *bezeichnen wir mit*

$$AC([a, b]) \ . \tag{1.1}$$

Jede absolut stetige Funktion ist auch stetig und fast überall differenzierbar. Insbesondere ist für eine Funktion $u \in L^1[a, b]$, die Funktion

$$U(x) := \int_a^x u(t)\,\mathrm{d}t \ , \quad x \in [a, b] \ , \tag{1.2}$$

absolut stetig und es gilt $U' = u$ fast überall. Weitere Details finden sich in [6].

Im weiteren Verlauf werden wir nicht nur mit den Räumen $L^p(\Omega)$, sondern auch mit Sobolev-Räumen zu tun haben. Da wir uns jedoch im Rahmen dieser Arbeit in Räumen von Funktion auf der reellen Linie befinden (insbesondere auf einem kompakten Intervall), gibt es für jede $L^1([a, b])$-Funktion u auf dem Intervall $[a, b]$ mit verallgemeinerter Ableitung u', die sich ebenfalls im $L^1([a, b])$ befinden möge, eine absolut stetige Funktion v, die fast überall auf $[a, b]$ mit u überein stimmt, was uns dazu berechtigt Randwerte konkret zu setzen ([7]). Beispielsweise kann man nun den Sobolev-Raum $H_0^1([a, b])$ schreiben als

$$H_0^1([a, b]) = \left\{ u \in L^2([a, b]) \mid u \in AC([a, b]) \ , \ u(a) = u(b) = 0 \ , \ u' \in L^2([a, b]) \right\} \ .$$

Ebenfalls von Bedeutung sind für uns natürlich Konvergenzsätze der Maßtheorie:

Satz 1.1.9 (Satz von Lebesgue)**.** *Seien* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *eine messbare Menge und* (f_n) *eine Folge messbarer Funktionen, die f.ü. gegen eine messbare Funktion* f *konvergiert. Weiter existiere ein* $h \in L^1(\Omega)$ *mit* $|f_n| \leqslant h$ *f.ü. auf* X *für alle* $n \in \mathbb{N}$*. Dann gelten* $f \in L^1(\Omega)$ *und*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}x = \int_\Omega f \,\mathrm{d}x \ .$$

Aus diesem Resultat lassen sich zwei wichtige Folgerungen ableiten.

Satz 1.1.10. *Seien* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *eine messbare Menge und* (f_n) *beziehungsweise* (h_n) *Folgen in* $L^1(\Omega)$*. Die Folge* (f_n) *konvergiere f.ü. gegen eine messbare Funktion* f *und* (h_n) *konvergiere punktweise und in* $L^1(\Omega)$ *gegen eine Funktion* h*. Weiter gelte* $|f_n| \leqslant h_n$ *für f.a.* $x \in \Omega$*. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n - f| \,\mathrm{d}x = 0 \ .$$

Satz 1.1.11 (Differenzieren von Parameterintegralen)**.** *Es sei* $I \subset \mathbb{R}$ *ein Intervall,* $t_0 \in I$ *und* $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ *habe die Eigenschaften:*

(i) $f(t, \cdot) \in L^1(\Omega)$ *für alle* $t \in I$.

(ii) Es gibt ein $\delta > 0$*, so dass die partielle Ableitung* $\partial_t f(t, x)$ *für alle* $t \in U := I \cap [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ *für fast alle* $x \in \Omega$ *existiert.*

(iii) Es gibt ein $h \in L^1(\Omega)$ *mit* $|\partial_t f(t, x)| \leqslant h(x)$ *für alle* $t \in U$ *und fast alle* $x \in \Omega$*.*

Dann ist die durch

$$F(t) := \int_\Omega f(t,x)\,\mathrm{d}x$$

definierte Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt

$$F'(t_0) = \int_\Omega \partial_t f(t_0,x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Satz 1.1.12 (Lemma von Fatou)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine messbare Menge. Für jede Folge (f_n) nichtnegativer, messbarer, numerischer Funktionen auf Ω gilt*

$$\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n\,\mathrm{d}x \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\,\mathrm{d}x\,.$$

1.2 Monotone und pseudomonotone Operatoren

Die abstrakte Theorie monotoner Operatoren, deren Aufleben Anfang der sechziger Jahre begann, stellt eine Verallgemeinerung von einfachen Existenzresultaten nichtlinearer Gleichungen im Endlichdimensionalen dar. Ein recht anschaulich einzusehendes Prinzip ist das Folgende: Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige, monoton wachsende und koerzive Funktion (d.h. $f(u) \to \pm\infty$, für $u \to \pm\infty$, z.B. $f(u) = u^3$), so besitzt die Gleichung $f(u) = b$ für jedes $b \in \mathbb{R}$ eine Lösung $u \in \mathbb{R}$. Die Verallgemeinerung auf (nichtlineare) Operatorgleichungen der Form $Au = b$ in allgemeinen Banachräumen ist dabei jedoch mit vielen technischen Raffinessen gespickt, die sich aus der Struktur der im Allgemeinen unendlichdimensionalen Räume ergeben (z.B. aus einer stärkeren Differenzierung der Konvergenzbegriffe).

In diesem Abschnitt geben wir einen (exemplarischen) Beweis für den Hauptsatz über monotone Operatoren, der von Browder und Minty bewiesen wurde. Dieser wichtige Satz gibt dann z.B. Aufschluss über die Existenz von Lösungen elliptischer Randwertprobleme ([25], [14]). Weitere wichtige Theoreme, wie der Hauptsatz über pseudomonotone Operatoren, seien an dieser Stelle der Vollständigkeit halber (ohne Beweis) zitiert.

Die Definition der Monotonie im Banachraum, stützt sich auf folgende Äquivalenz:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{ist monoton wachsend.} \quad \Leftrightarrow \quad (f(u) - f(v))(u - v) \geqslant 0 \quad \text{für alle } u, v \in \mathbb{R}.$$

Die Koerzivität lässt sich über eine ähnliche Charakterisierung definieren.

An dieser Stelle vereinbaren wir noch, da im Folgenden der Begriff des Operators eine große Rolle spielen wird, was wir genau darunter verstehen wollen: Eine beliebige Abbildung $A : X \to Y$ auf der Menge X in die Menge Y bezeichnen wir als **Operator**. Ist von einem Operator die Rede, so machen wir bis dato keine Annahmen über weitere Abbildungseigenschaften, wie z.B. Linearität oder metrische Eigenschaften (Stetigkeitsbegriffe oder Ähnliches). Weitere Voraussetzungen an den Operator werden explizit genannt. Im Allgemeinen werden jedoch X und Y lineare Räume sein, aber auch dies wird explizit gesagt werden, es sei denn dies geht aus dem jeweils betrachteten Kontext unmissverständlich hervor.

Definition 1.2.1. Sei X reflexiver Banachraum und $A : X \to X^*$ ein Operator. A heißt

(i) **monoton**, falls
$$\langle Au - Av, u - v \rangle_X \geqslant 0 \quad \text{für alle } u, v \in X,$$

(ii) **strikt monoton**, falls
$$\langle Au - Av, u - v \rangle_X > 0 \quad \text{für alle } u, v \in X \text{ mit } u \neq v,$$

(iii) **stark monoton**, falls es eine Konstante $c > 0$ gibt, so dass
$$\langle Au - Av, u - v \rangle_X \geqslant c \|u - v\|^2 \quad \text{für alle } u, v \in X.$$

(iv) **koerziv**, falls
$$\lim_{\|x\| \to \infty} \frac{\langle Au, u \rangle_X}{\|u\|} = \infty \,.$$

***Bemerkung* 1.2.2.** (i) Jeder stark monotone Operator ist strikt monoton und jeder strikt monotone Operator ist monoton.

(ii) Stark monotone Operatoren sind automatisch koerziv.

Beweis. Es gilt die Abschätzung
$$\begin{aligned} \langle Au, u \rangle_X &= \langle Au - A(0), u \rangle_X + \langle A(0), u \rangle_X \\ &\geqslant c \|u\|^2 - \|A(0)\|_{X^*} \, \|u\| \end{aligned}$$
womit sofort
$$\frac{\langle Au, u \rangle_X}{\|u\|} \geqslant c \|u\| - \|A(0)\|_{X^*} \to \infty \,,$$
falls $\|u\| \to \infty$, folgt. ■

Definition 1.2.3. Sei X reflexiver Banachraum. Ein Operator $A : X \to X^*$ heißt

(i) **demistetig**, wenn
$$x_n \to x \quad \text{in X} \qquad \Rightarrow \qquad Ax_n \rightharpoonup x \quad \text{in } X^*,$$

(ii) **hemistetig**, falls die Abbildung
$$t \mapsto \langle A(u + tv), w \rangle_X$$
im Intervall $[0, 1]$ für alle $u, v, w \in X$ stetig ist und

(iii) **stark stetig**, wenn
$$x_n \rightharpoonup x \quad \text{in X} \qquad \Rightarrow \qquad Ax_n \to x \quad \text{in } X^*.$$

(iv) A heißt **beschränkt**, wenn beschränkte Mengen in X in beschränkte Mengen in X^* abbildet.

Hilfssatz 1.2.4. *Sei $A : X \to X^*$ ein Operator. Dann gelten folgende Aussagen:*

(i) Ist A stark stetig, so ist A kompakt.

(ii) Ist A demistetig oder monoton, so ist A lokal beschränkt.

(iii) Ist A monoton und hemistetig, dann ist A auch demistetig.

Beweis. Wir wollen lediglich den Beweis der ersten beiden Aussagen führen.

(i) Sei $M \subset X$ beschränkt. Wir zeigen die relative Folgenkompaktheit von $A(M)$. Sei also weiter (Ax_n) eine Folge in $A(M)$. Da M beschränkt ist, folgt dies auch für die Folge (x_n) und so gibt es eine schwach konvergente Teilfoge, sagen wir $x_{n_k} \rightharpoonup x \in X$. Die starke Stetigkeit von A liefert $Ax_{n_k} \to Ax$ und so enthält (Ax_n) eine konvergente Teilfolge. Die Behauptung folgt, da in Banachräumen relative Folgenkompaktheit und relative Kompaktheit übereinstimmen.

(ii) Wir zeigen die Behauptung nur im Fall der Demistetigkeit. Angenommen A wäre nicht lokal beschränkt. Dann gibt es eine Folge $u_n \to u$ mit $\|Au_n\|_{X^*} \to \infty$. Da A aber demistetig ist, folgt $Au_n \rightharpoonup Au$ und da schwach konvergente Folgen wegen Hilfsatz 1.1.4 (iv) notwendig beschränkt sind, ergibt sich der Widerspruch.

Weitere Details finden sich zum Beipiel in [14, S. 61 ff] oder in der Monographie von Zeidler [25]. ■

Hilfssatz 1.2.5 (Minty)**.** *Sei $A : X \to X^*$ hemistetiger und monotoner Operator. Dann gelten:*

(i) A ist maximal monoton, d.h. gilt für feste $u \in X$ und $b \in X^*$ die Ungleichung

$$\langle b - Av, u - v\rangle_X \geqslant 0 \quad \forall v \in X ,$$

so folgt bereits $Au = b$.

(ii) Genügt A den Bedingungen

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u && \text{in } X, \\ Au_n &\rightharpoonup b && \text{in } X^*, \\ \langle Au_n, u_n\rangle_X &\to \langle b, u\rangle_X \end{aligned}$$

folgt $Au = b$.

(iii) Aus

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{in } X, \quad Au_n \to b \quad \text{in } X^*$$

oder alternativ aus

$$u_n \to u \quad \text{in } X, \quad Au_n \rightharpoonup b \quad \text{in } X^*$$

folgt $Au = b$.

Beweis. (i) Seien $u \in X$ und $b \in X^*$ derart, dass die Vorraussetzung erfüllt ist. Wir setzen $v := u - tw$ für beliebiges $w \in X$, $t > 0$. Damit haben wir nach Voraussetzung

$$\langle b - A(u - tw), tw \rangle_X \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad \langle b - A(u - tw), w \rangle_X \geqslant 0 \, .$$

Der Grenzübergang $t \to 0$ liefert wegen der Hemistetigkeit von A die Ungleichung

$$\langle b - Au, w \rangle_X \geqslant 0 \, .$$

ersetzt man w durch $-w$, so folgt die umgekehrte Ungleichung und wir erhalten dann $\langle b - Au, w \rangle_X = 0$ für jedes $w \in X$, also $Au = b$.

(ii) Sei $v \in X$ beliebig. Wegen der Monotonie von A folgt (für alle $n \in \mathbb{N}$):

$$0 \leqslant \langle Au_n - Av, u_n - v \rangle_X = \langle Au_n, u_n \rangle_X - \langle Av, u_n \rangle_X - \langle Au_n - Av, v \rangle_X \, .$$

Mit den gegebenen Voraussetzungen folgt dann für alle $v \in X$ die Ungleichung

$$0 \leqslant \langle b, u \rangle_X - \langle Av, u \rangle_X - \langle b - Av, v \rangle_X = \langle b - Av, u - v \rangle_X \, .$$

Da A nach (i) maximal monoton ist, folgt $b = Au$.

(iii) Mit Hilfsatz 1.1.4 (ii) und (iii) ergibt sich aus den Voraussetzungen jeweils

$$\langle Au_n, u_n \rangle_X \to \langle b, u \rangle_X$$

und nun folgt die Behauptung mit (ii). ∎

Das damit nun beweisbare Resultat wurde 1963 bewiesen und stellt im Prinzip den Kern der Theorie monotoner Operatoren dar. Wir wollen es an dieser Stelle (exemplarisch) beweisen.

Theorem 1.2.6 (Minty und Browder)**.** *Sei X ein separabler, reflexiver, reeller Banachraum. Weiter sei der Operator $A : X \to X^*$ monoton, koerziv und hemistetig. Dann gibt es für alle $b \in X^*$ eine Lösung $u \in X$ der Gleichung*

$$Au = b$$

und die Lösungsmenge ist abgeschlossen, beschränkt und konvex.

***Bemerkung* 1.2.7.** Der Beweis wird in folgenden Schritten ablaufen:

(i) Wir approximieren die Lösung u indem wir uns auf endlichdimensionale Teilräume von X zurückziehen und das Galerkin-Verfahren anwenden.

(ii) Wir zeigen eine apriori-Abschätzung für die entstehende Folge (u_n) von Lösungen der endlich-dimensionalen Probleme und zeigen, dass dies die Beschränktheit der Folge (Au_n) zu Folge hat.

(iii) Dann beweisen wir die Konvergenz des Galerkin-Verfahrens und zu guter Letzt

(iv) die Eigenschaften der Lösungsmenge.

Beweis. (i) Da X separabel ist, finden wir eine linear unabhängige Menge $\{w_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, so dass $\operatorname{span}\{w_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ dicht in X ist. Damit setzen wir

$$X_n := \operatorname{span}\{w_1, \dots, w_n\}$$

und suchen mit Hilfe des Galerkin-Verfahrens approximative Lösungen der Form

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} c_k^n w_k \ ,$$

die das (nichtlineare) Galerkin-System

$$\begin{aligned}
\langle Au_n - b, w_1 \rangle_X &= 0 \\
\langle Au_n - b, w_2 \rangle_X &= 0 \\
&\ \vdots \\
\langle Au_n - b, w_n \rangle_X &= 0
\end{aligned}$$

lösen.

Wir setzen $\mathbf{c}^n := (c_1^n, \dots, c_n^n)$ und $\mathbf{g} := (g_1, \dots, g_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,

$$\mathbf{c}^n \mapsto g_k(\mathbf{c}^n) = \langle Au_n - b, w_k \rangle_X \ , \quad k = 1, \dots, n \ .$$

Mit diesen Bezeichnungen können wir das nichtlineare System umschreiben in

$$\mathbf{g}(\mathbf{c}^n) = 0 \ .$$

Da A monoton und hemistetig ist, folgt nach Hilfsatz 1.2.4 (iii), dass A auch demistetig ist. Folglich ist die Abbildung $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig, da in endlich-dimensionalen Räumen schwache und starke Konvergenz übereinstimmen. Weiter sehen wir

$$\sum_{k=1}^{n} g_k(\mathbf{c}^n) c_k^n = \left\langle Au_n - b, \sum_{k=1}^{n} c_k^n w_k \right\rangle_X = \langle Au_n, u_n \rangle_X - \langle b, u_n \rangle_X \ .$$

Nun ist A koerziv, d.h. für jedes $C > 0$ existiert ein $R_0 > 0$, so dass

$$\frac{\langle Au, u \rangle_X}{\|u\|} \geqslant C \ ,$$

falls $\|u\| \geqslant R_0$ gilt. Wir wählen $C := 1 + \|b\|_{X^*}$ und erhalten

$$\langle Au, u \rangle_X \geqslant (1 + \|b\|_{X^*}) \|u\| \ ,$$

woraus insbesondere für $\mathbf{c}^n$ mit $\|u_n\| = R_0$

$$\langle Au_n, u_n \rangle_X \geqslant (1 + \|b\|_{X^*}) \|u_n\|$$

folgt und so auch

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} g_k(\mathbf{c}^n)c_k^n &= \langle Au_n, u_n\rangle_X - \langle b, u_n\rangle_X \\ &\geqslant (1+\|b\|_{X^*})\|u_n\| - \|b\|_{X^*}\|u_n\| \\ &= \|u_n\| > 0\ .\end{aligned}$$

Nach einer Folgerung aus dem Fixpunktsatz von Brouwer (siehe [14, S. 17 ff.]) gibt es eine Lösung u_n des Galerkin-Systems mit

$$\|u_n\| \leqslant R_0$$

und die Konstante R_0 ist insbesondere unabhängig von n.

(ii) Da A monoton ist, ist A auch lokal beschränkt, d.h. es gibt $r, \delta > 0$ mit

$$\|v\| \leqslant r \quad \Rightarrow \quad \|Av\|_{X^*} \leqslant \delta\ .$$

Wieder wegen der Monotonie von A, d.h. $\langle Au_n - Av, u_n - v\rangle_X \geqslant 0$, folgt

$$\langle Au_n, v\rangle_X \leqslant \langle Av, v\rangle_X + \langle Au_n, u_n\rangle_X - \langle Av, u_n\rangle_X\ .$$

Da u_n das Galerkin-System löst, folgt insbesondere $\langle Au_n, u_n\rangle_X = \langle b, u_n\rangle_X$ und so die Abschätzung

$$|\langle Au_n, u_n\rangle_X| \leqslant \|b\|_{X^*} R_0\ .$$

Eine Version der Norm in X^* liefert zusammen mit den obigen Betrachtungen

$$\begin{aligned}\|Au_n\|_{X^*} &= \sup_{\|v\|=r} \frac{1}{r}\langle Au_n, v\rangle_X \\ &\leqslant \sup_{\|v\|=r} \frac{1}{r}\left(\langle Av, v\rangle_X + \langle Au_n, u_n\rangle_X - \langle Av, u_n\rangle_X\right) \\ &\leqslant \frac{1}{r}\left(\delta r + \|b\|_{X^*} R_0 + \delta R_0\right) < \infty\ ,\end{aligned}$$

d.h. die Folge (Au_n) ist beschränkt.

(iii) Da X reflexiv ist und die Folge (u_n) beschränkt, kann man eine schwach konvergente Teilfolge auswählen, sagen wir $u_{n_k} \rightharpoonup u$ in X. Weiter gibt es für alle $w \in \bigcup_{l=1}^{\infty} X_l$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $w \in X_{n_0} \subset X_{n_0+1} \subset \ldots$. Da u_n eine Lösung des Galerkin-Systems ist, folgt für alle $n \geqslant n_0$

$$\langle Au_n, w\rangle_X = \langle b, w\rangle_X\ , w \in X_{n_0}\ ,$$

woraus

$$\lim_{n\to\infty} \langle Au_n, w\rangle_X = \langle b, w\rangle_X \quad \forall w \in \bigcup_{l=0}^{\infty} X_l$$

folgt. Wegen *(ii)* ist die Folge (Au_n) beschränkt und hat somit auch eine konvergente Teilfolge (Au_{n_k}) im reflexiven Banachraum X^* mit

$$Au_{n_k} \rightharpoonup c \quad \text{in} \quad X^* \; .$$

Dann haben wir einerseits $\langle Au_n, w\rangle_X \to \langle b, w\rangle_X$ und auch $\langle Au_n, w\rangle_X \to \langle c, w\rangle_X$, woraus $\langle c - b, w\rangle_X = 0$ für alle $w \in \bigcup_{l=1}^{\infty} X_l$ folgt. Da $\bigcup_{l=1}^{\infty} X_l$ dicht in X liegt, folgt $c = b$ und so auch $Au_{n_k} \rightharpoonup b$. Da diese Argumentation für alle schwach konvergenten Teilfolgen greift, folgt, dass bereits die ganze Folge schwach gegen den selben Grenzwert konvergiert:

$$Au_n \rightharpoonup b \quad \text{in} \quad X^* \; .$$

Da u_n eine Lösung des Galerkin-Systems ist, gilt insbesondere $\langle Au_n, u_n\rangle_X = \langle b, u_n\rangle_X$, woraus sofort

$$\lim_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n\rangle_X = \lim_{n\to\infty} \langle b, u_n\rangle_X = \langle b, u\rangle_X$$

folgt. Die Voraussetzungen des Lemmas von Minty (Hilfssatz 1.2.5 (ii)) sind also erfüllt und es folgt $Au = b$.

(iv) Für jedes $b \in X^*$ setzen wir $S := \{u \in X \mid Au = b\}$.

(a) Angenommen S wäre nicht beschränkt. Dann gäbe es für alle $u \in S$ ein $R > 0$ mit $\|u\| \geqslant R$. Analog zu (ii) haben wir

$$0 = \langle Au - b, u\rangle_X = \langle Au, b\rangle_X - \langle b, u\rangle_X \geqslant \|u\| \geqslant R > 0$$

und das ist ein Widerspruch.

(b) Seien $u_1, u_2 \in S$. Setzen wir $w = tu_1 + (1-t)u_2$, $t \in [0,1]$, und nehmen ein beliebiges $v \in X$, dann folgt wegen der Monotonie von A

$$\begin{aligned}
\langle b - Av, w - v\rangle_X &= \langle b - Av, tu_1 + (1-t)u_2 - (t - 1 + t)v\rangle_X \\
&= \langle b - Av, t(u_1 - v)\rangle_X + \langle b - Av, (1-t)(u_2 - v)\rangle_X \\
&= t\,\langle Au_1 - Av, u_1 - v\rangle_X + (1-t)\,\langle Au_2 - Av, u_2 - v\rangle_X \\
&\geqslant 0 \; .
\end{aligned}$$

Da A maximal monoton ist, folgt für die Konvexkombination w mit dem Lemma von Minty (Hilfssatz 1.2.5 (i)) gerade $Aw = b$.

(c) Sei $(u_n) \subset S$, d.h. $Au_n = b$, mit $u_n \to u$. Sei nun wieder $v \in X$ beliebig. Dann folgt wegen der Monotonie von A

$$\begin{aligned}
\langle b - Av, u - v\rangle_X &= \lim_{n\to\infty} \langle b - Av, u_n - v\rangle_X \\
&= \lim_{n\to\infty} \langle Au_n - Av, u_n - v\rangle_X \\
&\geqslant 0 \; .
\end{aligned}$$

Folglich erfüllt A die Voraussetzungen des Minty-Lemmas (Hilfssatz 1.2.5 (i)) und es folgt $Au = b$ und so $u \in S$. ■

Folgerung 1.2.8. *Mit den Voraussetzungen des obigen Theorems ist die Lösung von $Au = b$ eindeutig, falls A zusätzlich strikt monoton ist.*

Beweis. Seinen $u, v \in X$ verschiedene Lösungen der Operatorgleichung. Dann folgt

$$0 < \langle Au - Av, u - v \rangle_X = \langle b - b, u - v \rangle_X = 0$$

und das ist ein Widerspruch. ∎

Die Behauptung des Satzes von Minty und Browder bleiben auch in nicht reflexiven Banachräumen richtig (siehe [25, S. 557 ff]).

Das Resultat von Minty und Browder lässt sich allerdings noch weiter verallgemeinern, nämlich auf so genannte pseudomonotone Operatoren (wir werden hier [14] folgen). Dies sind z.B. Operatoren der Form $A + B$, wobei A monoton und hemistetig ist und B stark stetig.

Definition 1.2.9. Seien X ein reflexiver, reeller Banachraum und $A : X \to X^*$ ein Operator. A heißt **Operator vom Typ-M**, wenn aus

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u \quad \text{in } X\,, \\ Au_n &\rightharpoonup b \quad \text{in } X^*\,, \\ \limsup_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n \rangle_X &\leqslant \langle b, u \rangle_X \end{aligned}$$

bereits $Au = b$ folgt.

Der folgende Hilfssatz zeigt, dass diese Eigenschaft unter stark stetigen Störungen erhalten bleibt.

Hilfssatz 1.2.10. *Es sei X ein reflexiver, reeller Banachraum und $A, B : X \to X^*$ seien Operatoren. Ist A vom Typ-M und B stark stetig, so ist $A + B$ ein Operator vom Typ-M.*

Beweis. Sei (u_n) eine Folge in X mit

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u \quad \text{in } X\,, \\ Au_n + Bu_n &\rightharpoonup b \quad \text{in } X^*\,, \\ \limsup_{n\to\infty} \langle Au_n + Bu_n, u_n \rangle_X &\leqslant \langle b, u \rangle_X\,. \end{aligned}$$

B ist stark stetig, also folgt $Bu_n \to Bu$ in X^*. Daher folgern wir mit Hilfssatz 1.1.4(ii) $\langle Bu_n, u_n \rangle_X \to \langle Bu, u \rangle_X$. Es folgt nun

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u \quad \text{in } X\,, \\ Au_n &\rightharpoonup b - Bu \quad \text{in } X^*\,, \\ \limsup_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n \rangle_X &\leqslant \langle b - Bu, u \rangle_X \end{aligned}$$

und da A vom Typ-M ist folgt $Au = b - Bu$, also $Au + Bu = b$. ∎

Definition 1.2.11. Ein Operator $A : X \to X^*$ auf dem reflexiven, reellen Banachraum X heißt **pseudomonoton**, falls aus

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u \qquad \text{in } X, \\ \limsup_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - u\rangle_X &\leqslant 0\,. \end{aligned}$$

folgt, dass für jedes $w \in X$ die Ungleichung

$$\langle Au, u - w\rangle_X \leqslant \liminf_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - w\rangle_X$$

richtig ist.

Wir können nun einige Prototypen pseudomonotoner Operatoren und von Operatoren des Typs-M angeben. Auch der letzte Hilfssatz erweist sich als ein Spezialfall dieser Beispiele.

Hilfssatz 1.2.12. *$A, B : X \to X^*$ seien Operatoren auf dem reflexiven, reellen Banachraum X. Dann gelten*

(i) Ist A monoton und hemistetig, so ist A auch pseudomonoton.

(ii) Jeder stark stetige Operator A ist pseudomonoton.

(iii) Sind A und B pseudomonoton, so ist auch $A + B$ pseudomonoton.

(iv) Jeder pseudomonotone Operator A ist vom Typ-M.

(v) Ist A pseudomonoton und lokal beschränkt, so ist A demistetig.

Beweis. Wir wollen an dieser Stelle nicht alle Punkte des Hilfssatzes zeigen, sonder wir werden lediglich die ersten beiden Punkte exemplarisch beweisen. Für weitere Details sei auf [25] und [14] verwiesen.

(i) Wir wählen eine Folge (u_n) in X mit $u_n \rightharpoonup u$ derart, dass

$$\limsup_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - u\rangle_X \leqslant 0\,.$$

Wegen der Monotonie von A haben wir

$$\langle Au_n - Au, u_n - u\rangle_X \geqslant 0\,,$$

woraus nach einer kleinen Umstellung der Gleichung zusammen mit der obigen Voraussetzung gerade

$$0 \geqslant \limsup_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - u\rangle_X \geqslant \liminf_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - u\rangle_X \geqslant \liminf_{n\to\infty} \langle Au, u_n - u\rangle_X = 0 \tag{1.3}$$

folgt. Für $0 < t \leqslant 1$ setzen wir nun $z := u + t(w - u)$, $w \in X$, und sehen wieder auf Grund der Monotonie von A

$$\langle Au_n - Az, u_n - z\rangle_X \geqslant 0\,.$$

Umgestellt ergibt dies

$$t \langle Au_n, u - w\rangle_X \geqslant - \langle Au_n, u_n - u\rangle_X + \langle Az, u_n - u\rangle_X + t \langle Az, u - w\rangle_X \ .$$

Zusammen mit (1.3) erhalten wir

$$\liminf_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - w\rangle_X \geqslant \langle Az, u - w\rangle_X \ .$$

Nun nutzen wir die Hemistetigkeit von A und folgern für $t \to +0$ $\langle A(u + t(w - u)), v\rangle_X \to \langle Au, v\rangle_X$ für alle $v \in X$, also gilt

$$\liminf_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - w\rangle_X \geqslant \langle Au, u - w\rangle_X$$

für alle $w \in X$, d.h. A ist pseudomonoton.

(ii) Seien A stark stetig und (u_n) eine Folge in X mit $u_n \rightharpoonup u$. Wir haben dann $Au_n \to u_n$ auf Grund der starken Stetigkeit und nun folgt die Behauptung mit Hilfssatz 1.1.4, welcher

$$\lim_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - w\rangle_X = \langle Au, u - w\rangle_X$$

für alle $w \in X$ liefert. ■

Durch eine Adaption der Methoden des Beweises der Hauptsatzes von Minty und Browder über monotone Operatoren kann man nun den Hauptsatz der Theorie pseudomonotoner Operatoren beweisen ([25], [14]). Um der Vollständigkeit Willen sei dieses Resultat hier noch angegeben.

Theorem 1.2.13. *Sei X ein separabler, reflexiver, reeller Banachraum. Weiter sei der Operator $A : X \to X^*$ pseudomonoton, beschränkt und koerziv. Dann gibt es für alle $b \in X^*$ eine Lösung $u \in X$ der Gleichung*

$$Au = b \, .$$

1.3 Maximal monotone Operatoren

Im vorigen Abschnitt haben wir gesehen, dass für einen monotonen und hemistetigen Operator $A : X \to X^*$ mit $(u, u^*) \in X \times X^*$ die Implikation

$$\langle u^* - Av, u - v\rangle_X \geqslant 0 \quad \forall v \in X \quad \Rightarrow \quad Au = u^*$$

richtig ist. Monotone, hemistetige Operatoren, die auf dem ganzen Raum definiert sind, bilden eine wichtige Untermenge der so genannten maximal monotonen Operatoren. Wir werden in diesem Abschnitt eine Verallgemeinerung dieses Konzeptes einführen und einen kurzen Überblick über die (für den weiteren Verlauf dieser Arbeit) wichtigsten Resultate angeben. Weiterführenden Literatur findet man in [25], [9] oder [14].

Wir wenden uns zunächst dem Konzept der mehrwertigen Abbildungen zu. 2^M bezeichnet im Folgenden die Potenzmenge einer Menge M.

Definition 1.3.1. Es seinen M, N Mengen. Für eine Abbildung $A : M \to 2^N$ heißen die Mengen

$$\mathcal{D}(A) := \{u \in M \mid Au \neq \emptyset\}$$

der **effektive Definitionsbereich** von A und

$$\mathcal{R}(A) := \bigcup_{u \in \mathcal{D}(A)} Au$$

der **Wertebereich** oder **Range** von A. Ferner bezeichnet man die Menge

$$\mathcal{G}(A) := \{(u, v) \in M \times N \mid u \in \mathcal{D}(A)\,,\ v \in Au\}$$

als **Graphen** von A. Wir schreiben im Folgenden einfacher $(u, v) \in A$ für $(u, v) \in \mathcal{G}(A)$.

Mit dieser Definition existiert stets die Umkehrabbildung $A^{-1} : N \to 2^M$, gemäß

$$A^{-1}(v) = \{u \in M \mid v \in Au\}$$

mit $\mathcal{D}(A^{-1}) = \mathcal{R}(A)$ und $\mathcal{R}(A^{-1}) = \mathcal{D}(A)$. Für den Graphen von A^{-1} gilt:

$$\mathcal{G}(A^{-1}) = \{(v, u) \in N \times M \mid (u, v) \in \mathcal{G}(A)\}\ .$$

Weiter kann jede Abbildung $A : M \to N$ mit einer mehrwertigen Abbildung identifiziert werden: Wir setzen

$$\bar{A}u := \begin{cases} \{Au\}\ , & \text{falls } u \in \mathcal{D}(A), \\ \emptyset\ , & \text{falls } u \notin \mathcal{D}(A) \end{cases}$$

und sehen, dass die Definitionsbereiche und die Wertebereiche von A und $\bar{A}$ übereinstimmen. Vermöge dieser Identifizierung werden wir weiterhin kurz A anstatt $\bar{A}$ schreiben.

Definition 1.3.2. Seien X reflexiver, reeller Banachraum und $A : M \subset X \to 2^{X^*}$ eine Abbildung. A heißt

(i) **monoton**, wenn

$$\langle u^* - v^*, u - v \rangle_X \geqslant 0$$

für alle $(u, u^*), (v, v^*) \in A$ gilt und

(ii) **maximal monoton**, wenn aus $(u, u^*) \in M \times X$ und

$$\langle u^* - v^*, u - v \rangle_X \geqslant 0 \quad \text{für alle } (v, v^*) \in A$$

folgt, dass bereits $(u, u^*) \in A$ gilt.

Diese Definition der Monotonie stimmt mit der Defintion der Monotonie für einwertige Operatoren $A : X \to X^*$ auf Grund der obigen Identifizierung von A mit $\bar{A}$ überein.

***Bemerkung* 1.3.3.** Ein Operator $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to 2^{X^*}$ ist genau dann maximal monoton, wenn sein Graph keine echte monotone Erweiterung besitzt, d.h. es gibt keine Teilmenge $Y \subset X \times X^*$ mit $\mathcal{G}(A) \subsetneq Y$, die Graph eines monotonen Operators ist.

Ein anschauliches Beispiel hierzu liefert die Signum-Funktion auf $X \simeq X^* = \mathbb{R}$:

$$\operatorname{sgn}(u) := \begin{cases} -1\,, & \text{falls } u < 0, \\ 0\,, & \text{falls } u = 0, \\ 1\,, & \text{falls } u > 0. \end{cases}$$

Sie ist monoton, aber nicht maximal monoton, denn sie hat die Funktion

$$f(u) := \begin{cases} -1\,, & \text{falls } u < 0, \\ [-1, 1]\,, & \text{falls } u = 0, \\ 1\,, & \text{falls } u > 0 \end{cases}$$

als monotone Erweiterung.

Hilfssatz 1.3.4. *Sei X reflexiver Banachraum.*

(i) Ist der Operator $A : X \to X^*$ monoton und hemistetig. Dann ist A maximal monoton.

(ii) Ist $A : X \to X^*$ maximal monoton, so auch $A^{-1} : X^* \to 2^X$.

(iii) Ist $A : X \to 2^{X^*}$ monoton mit $\mathcal{R}(A) = X^*$ und ist $A^{-1} : X^* \to 2^X$ einwertig und hemistetig, so ist A maximal monoton.

Beweis. Punkt (i) wurde bereits in Hilfssatz 1.2.5 bewiesen.

(ii) Da X reflexiv ist können wir X mit X^{**} identifizieren und die Abbildung A^{-1} als eine Abbildung von X^* in $2^{X^{**}}$ auffassen. Für $(u^*, u) \in A^{-1}$ gelte

$$0 \leqslant \langle u - v, u^* - v^* \rangle_{X^*} \qquad \text{für alle } (v^*, v) \in A^{-1}\,.$$

Dies ist äquivalent zu

$$0 \leqslant \langle u^* - v^*, u - v \rangle_X \qquad \text{für alle } (v, v^*) \in A\,.$$

Da A maximal monoton ist, folgt $(u, u^*) \in A$, was nun aber wieder mit $(u^*, u) \in A^{-1}$ gleichwertig ist und das ist die Behauptung.

(iii) Die Monotonie von A^{-1} folgt mit der Identifizierung $X \simeq X^{**}$ wie in (ii). Damit ist A^{-1} monoton und hemistetig und so nach (i) maximal monoton. Wegen (ii) ist nun aber auch $A = (A^{-1})^{-1}$ maximal monoton und alles ist bewiesen. ■

Oft hat man es mit Summen oder Hintereinanderausführungen von Operatoren zu tun. Da diese nicht notwendig auf dem ganzen Raum definiert sein müssen, ist es notwendig die Operationen vernünftig zu definieren. Dies geschieht folgendermaßen:

Definition 1.3.5. Seien X, Y reelle Banachräume sowie $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to 2^{X^*}$, $B : \mathcal{D}(B) \subset X \to 2^{X^*}$ und $C : \mathcal{D}(C) \subset X^* \to 2^Y$ Operatoren. Dann heißt der Operator

$$A + B : \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B) \subset X \to 2^{X^*}, \quad \text{gemäß } (A + B)u := Au + Bu\,,$$

die **Summe** von A und B. Ferner heißt der Operator

$$CA : \mathcal{D}(CA) \subset X \to 2^X, \quad \text{gemäß } (CA)u := C(Au) := \bigcup_{v \in Au \cap \mathcal{D}(C)} Cv\,,$$

mit dem Bereich $\mathcal{D}(CA) = \{u \in \mathcal{D}(A) \mid Au \cap \mathcal{D}(C) \neq \emptyset\}$ die **Hintereinanderausführung** von A und C.

Es sei an dieser Stelle bemerkt, dass weder der Definitions noch der Wertebereich nichtlinearer Operatoren lineare Räume sein müssen. Das hat zur Folge, dass der Definitionsbereich von $A + B$ beziehungsweise der Bereich von CA leer sein können.

Weithin können unter der Summenbildung auch Eigenschaften der Abbildungen verloren gehen. Beispielsweise ist die Summe monotoner Operatoren stets monoton. Die Summe zweier maximal monotoner Operatoren ist jedoch keineswegs immer maximal monoton. Das folgende Theorem gibt ein hinreichendes Kriterium für die Invarianz der maximalen Monotonie unter der Summenbildung ([25]).

Theorem 1.3.6. *Sei X reeller, reflexiver Banachraum. Die Abbildungen $A, B : X \to 2^{X^*}$ seien maximal monoton und es gelte*

$$\mathcal{D}(A) \cap \operatorname{int} \mathcal{D}(B) \neq \emptyset\,.$$

Dann ist $A + B$ maximal monoton.

Ein weiteres wichtiges Beispiel maximal monotoner Operatoren sind so genannte Subdifferenziale geeigneter (nichtlinearer) Funktionale auf Banachräumen. Das Subdifferenzial auf Banachräumen ist eine Verallgemeinerung des Ableitungsbegriffes für konvexe Funktionen.

Definition 1.3.7. Sei X reeller Banachraum und $f : X \to [-\infty, \infty]$ ein Funktional. Ein Element $u^* \in X^*$ nennen wir **Subgradient** an der Stelle $u \in X$, wenn

$$f(v) - f(u) \geqslant \langle u^*, v - u \rangle \qquad \text{für alle } v \in X$$

gilt. Die Menge

$$(\partial f)(u) := \{u^* \in X^* \mid u^* \text{ ist Subgradient an der Stelle } u \in X\}$$

nennen wir **Subdifferenzial** von f an der Stelle $u \in X$.

Im Allgemeinen ist das Subdifferenzial ∂f als Abbildung von X nach X^* ein mehrwertiger Operator und der effektive Definitionsbereich $\mathcal{D}(\partial f)$ ist auch nicht zwingend der ganze Raum X. Der folgende Satz gibt ein nützliches hinreichendes Kriterium an die Hand um zu entscheiden, wann das Subdifferenzial einelementig ist ([14] und [23]).

Satz 1.3.8. *Sei X reeller Banachraum und $f : X \to \mathbb{R}$ ein konvexes und in $u \in X$ Gâteaux-differenzierbares Funktional mit Gâteaux-Ableitung $(Df)(u)$. Dann ist das Subdifferenzial $(\partial f)(u)$ einelementig und es gilt*

$$(\partial f)(u) = \{(Df)(u)\} \ .$$

Von großer Wichtigkeit ist das folgende Theorem von Rockafellar, welches 1966 von ihm bewiesen wurde ([14]).

Theorem 1.3.9 (Rockafellar)**.** *Sei X reflexiver, reeller Banachraum und $f : X \to (\infty, \infty]$ ein konvexes und unterhalbstetiges Funktional. Dann ist das Subdifferenzial $\partial f : X \to 2^{X^*}$ ein maximal monotoner Operator.*

Der Beweis stützt sich vor allen Dingen auf Trennungssätze konvexer Mengen und das Theorem von Kadec-Troyanski ([25, Prop. 32.23]). Er ist sehr umfangreich und soll hier nicht geführt werden. Zu bemerken ist noch, dass das Theorem auch in nicht reflexiven Banachräumen seine Gültigkeit behält ([23]). Im weiteren Verlauf werden wir noch zwei weitere starke Hauptsätze benutzen, die hier ebenfalls nur angegeben werden sollen. Die Beweise finden sich in [25, Cor. 32.26] und [9, Kap. IV, Kor. 1.4].

Theorem 1.3.10. *Der Operator $A : X \to 2^{X^*}$ sei maximal monoton im reflexiven, reellen Banachraum X. Weiter sei $B : X \to X^*$ monoton, hemistetig und beschränkt. Ist B ferner A-koerziv, d.h. es gibt ein $u_0 \in \mathcal{D}(A)$ mit*

$$\lim_{\|u\| \to \infty} \frac{\langle Bu, u - u_0 \rangle}{\|u\|} = \infty \ ,$$

so ist $A + B$ surjektiv, also $\mathcal{R}(A + B) = X^*$.

Theorem 1.3.11. *Seien X reflexiver, reller Banachraum und $C \subset X$ konvex und abgeschlossen. Der Operator $A : C \subset X \to 2^{X^*}$ sei maximal monoton und koerziv. Dann ist A surjektiv.*

2 Singuläre Integraloperatoren

2.1 Gewichtete L^p-Räume

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}$ Lebesgue-messbar. Für eine f.ü. endliche, nichtnegative, messbare Funktion ϱ auf Ω definieren wir die Räume

$$L^p(\Omega, \varrho) := \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist messbar und } \int_\Omega |f|^p \varrho \,\mathrm{d}x < \infty \right\}$$

mit der Norm

$$\|f\|_{L^p(\Omega,\varrho)} := \left(\int_\Omega |f|^p \varrho \,\mathrm{d}x \right)^{1/p} .$$

Damit sind diese Räume Banachräume. Mit $\sigma := \varrho^{1-q}$ gilt der folgende

Satz 2.1.1. *Sei $1 < p < \infty$. Der Operator*

$$T : L^q(\Omega, \sigma) \to L^p(\Omega, \varrho)^* \quad \textit{gemäß} \quad (Tg)(\cdot) = \int_\Omega \cdot g \,\mathrm{d}x$$

ist ein isometrischer Isomorphismus, wobei $L^p(\Omega, \varrho)^*$ den stetigen Dualraum von $L^p(\Omega, \varrho)$ bezeichnet und q der Beziehung

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

genüge. Bei $1 < p < \infty$ sind die Räume $L^p(\Omega, \varrho)$ insbesondere reflexiv und gleichmäßig konvex.

Beweis. Wegen der Hölderschen Ungleichung und $\sigma = \varrho^{-q/p}$ haben wir für $f \in L^p(\Omega, \varrho)$ und $g \in L^q(\Omega, \sigma)$

$$\begin{aligned} |\langle g, f\rangle| = \left| \int_\Omega fg \,\mathrm{d}x \right| &\leqslant \int_\Omega |f| \varrho^{1/p} \varrho^{-1/p} |g| \,\mathrm{d}x \\ &\leqslant \left(\int_\Omega |f|^p \varrho \,\mathrm{d}x \right)^{1/p} \left(\int_\Omega |g|^q \varrho^{-q/p} \,\mathrm{d}x \right)^{1/q} = \|f\|_{L^p(\Omega,\varrho)} \|g\|_{L^q(\Omega,\sigma)} \end{aligned} \tag{2.1}$$

und so ein durch g induziertes stetiges lineares Funktional auf $L^p(\Omega, \varrho)$. Wähle nun

$$f := \operatorname{sgn}(g) |g|^{q-1} \|g\|^{1-q}_{L^q(\Omega,\sigma)} \varrho^{-q/p} .$$

Dann ist $\|f\|_{L^p(\Omega,\varrho)} = 1$ und $\langle g, f\rangle = \|g\|_{L^q(\Omega,\sigma)}$ oder mit anderen Worten: Es gilt $\|T\| = 1$. Weiter ist T injektiv, denn ist $\langle g, f\rangle = 0$ für alle $f \in L^p(\Omega, \varrho)$, so folgt $g = 0$. Wäre dem nicht so, gäbe es eine Menge N vom Maß größer Null, auf der o.E.d.A. $g > 0$ wäre. Mit der Voraussetzung und

$$f := |g|^{q-1}\, \|g\|^{1-q}_{L^q(\Omega,\sigma)}\, \varrho^{-q/p}$$

würde dann der Widerspruch

$$0 = \langle g, f\rangle = \|g\|_{L^p(\Omega,\varrho)} \geqslant \int_N |g|^q \,\mathrm{d}x > 0$$

folgen. D.h. $\ker T = \{0\}$ und T ist wie behauptet injektiv. Umgekehrt folgt aus dem Satz von Riesz, dass wegen $f \in L^p(\Omega, \varrho) \Leftrightarrow f\varrho^{1/p} \in L^p(\Omega)$ und $g \in L^q(\Omega, \sigma) \Leftrightarrow g\varrho^{-q/p} \in L^q(\Omega) \simeq L^p(\Omega)^*$, alle Funktionale auf $L^p(\Omega, \varrho)$ bereits von dieser Gestalt sind (siehe z.B [6, Kapitel 7, §3]). Die Reflexivität folgt wegen $(1 - q)(1 - p) = 1$ und die gleichmäßige Konvexität bedingt sich dadurch, dass diese Eigenschaft für die Räume $L^p(\Omega)$ gilt. Damit ist der Satz bewiesen. ■

Im Folgenden seien $\Omega = [-a, a] \subset \mathbb{R}$ ein endliches Intervall, $L^p(\varrho) := L^p([-a, a], \varrho)$ und $L^p := L^p(\Omega, \varrho)$ für $\varrho \equiv 1$. Weiter werden nur Gewichtsfunktionen der Bauart

$$\varrho(x) = (a - x)^\gamma (a + x)^\delta\,, \quad -1 < \gamma,\ \delta < p - 1 \tag{2.2}$$

betrachtet, was für die (duale) Gewichtsfunktion σ gerade

$$\sigma(x) = (a - x)^\lambda (a + x)^\mu\,, \quad \lambda = (1 - q)\gamma,\ \mu = (1 - q)\delta\,, \tag{2.3}$$

bedeutet.

Gilt wie im obigen Satz $p, q > 1$, so folgt, da p, q zueinander duale Exponenten sind und $1 - p < -\gamma < 1$ gelten, gerade

$$-1 = \frac{1-p}{p-1} < \frac{-\gamma}{p-1} = (1 - q)\gamma = \lambda \quad \text{und} \quad \lambda = (1 - q)\gamma = (q - 1)(-\gamma) < q - 1\,.$$

Die gleiche Betrachtung zeigt dies für μ. Also ist σ ebenso von dieser Bauart.

Hilfssatz 2.1.2. *Es gelten die (stetigen) Einbettungen*

$$L^p(\varrho) \subset L^r \quad \textit{falls} \quad 1 \leqslant r \leqslant p \quad \textit{und} \quad r < \min\left\{\frac{p}{1+\gamma}, \frac{p}{1+\delta}\right\}\,,$$

beziehungsweise

$$L^q(\sigma) \subset L^s \quad \textit{falls} \quad 1 \leqslant s \leqslant q \quad \textit{und} \quad r < \min\left\{\frac{q}{1+\lambda}, \frac{q}{1+\mu}\right\}\,.$$

Beweis. Wir zeigen zunächst die Integrierbarkeit einer wie oben angegebenen Gewichtsfunktion $\varrho(x) = (a-x)^\gamma(a+x)^\delta$. Sei dazu $0 < \varepsilon < a$. Da $(a-x)^\gamma$ auf $[-a, -a+\varepsilon]$ stetig ist, nimmt sie dort auch ihr Maximum M_- an. Analog nimmt die Funktion $(a+x)^\delta$ auf $[a-\varepsilon, a]$ ihr Maximum M_- an. Daher folgt unter Beachtung von $-1 < \gamma, \delta$ sowie der Positivität von ϱ:

$$\begin{aligned}
\left| \int_{-a}^{a} \rho \,\mathrm{d}x - \int_{-a+\varepsilon}^{a-\varepsilon} \rho \,\mathrm{d}x \right| &\leqslant \int_{-a}^{-a+\varepsilon} (a-x)^\gamma (a+x)^\delta \,\mathrm{d}x + \int_{a-\varepsilon}^{a} (a-x)^\gamma (a+x)^\delta \,\mathrm{d}x \\
&\leqslant M_- \int_{-a}^{-a+\varepsilon} (a+x)^\delta \,\mathrm{d}x + M_+ \int_{a-\varepsilon}^{a} (a-x)^\gamma \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{M_-}{\delta+1}\varepsilon^{\delta+1} + \frac{M_+}{\gamma+1}\varepsilon^{\gamma+1} \to 0 \,,
\end{aligned}$$

falls $\varepsilon \to 0$, d.h. ϱ ist integrierbar.

Seien nun $r < p$ und $f \in L^p(\varrho)$. Wählen wir q mit

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \,,$$

dann gilt $1 < r < q$ und mit den Bezeichnungen

$$\tilde{p} := \frac{p}{r} \quad \text{und} \quad \tilde{q} := \frac{q}{r}$$

die Relation

$$1 = \frac{1}{\tilde{p}} + \frac{1}{\tilde{q}} \,.$$

Die Höldersche Ungleichung liefert dann

$$\|f\|_{L^r}^r = \|f^r\|_{L^1} = \int_{-a}^{a} |f|^r \varrho^{r/p} \varrho^{-r/p} \,\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_{-a}^{a} |f|^p \varrho \,\mathrm{d}x \right)^{r/p} \left(\int_{-a}^{a} \varrho^{-q/p} \,\mathrm{d}x \right)^{r/q} \,,$$

wobei noch zu zeigen ist, dass das letzte Integral endlich ist. Man sieht leicht, dass

$$-\frac{q}{p} = -\frac{\tilde{q}}{\tilde{p}} = 1 - \tilde{q}$$

gilt und so das letzte Integral mit den Bezeichnungen $\tilde{\lambda} := (1-\tilde{q})\gamma$ und $\tilde{\mu} := (1-\tilde{q})\delta$ die Form

$$\int_{-a}^{a} \varrho^{-q/p} \,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{a} (a-x)^{\tilde{\lambda}} (a+x)^{\tilde{\mu}} \,\mathrm{d}x$$

annimmt. Mit der Voraussetzung

$$r < \min\left\{ \frac{q}{1+\lambda}, \frac{q}{1+\mu} \right\}$$

bekommt man

$$-\gamma > \frac{r-p}{r} = 1-\tilde{p} \quad \text{und analog} \quad -\delta > 1-\tilde{p}\,.$$

Das liefert für $\tilde{\lambda}$ gerade

$$\tilde{\lambda} = (1-\tilde{q})\gamma = \frac{1}{\tilde{p}-1}(-\gamma) > \frac{1-\tilde{p}}{\tilde{p}-1} = -1\,,$$

was nun nach anfänglichen Betrachtungen die Integrierbarkeit von $\varrho^{-q/p}$ nach sich zieht (für $\tilde{\mu}$ analog) und so ist $f \in L^r$.

Bleibt noch der Fall $r = p$ zu zeigen. Hier folgt zwingend $-1 < \gamma, \delta < 0$, d.h.

$$\varrho(x)^{-1} = (a-x)^{-\gamma}(a+x)^{-\delta}$$

hat keine Singularitäten auf $[-a, a]$ und ist stetig. Daher ist $\varrho^{-1} \in L^\infty$ und wegen

$$\|f\|_{L^r}^r = \int_{-a}^{a} |f|^p \varrho\varrho^{-1}\,\mathrm{d}x \leqslant \|f\|_{L^p(\varrho)} \left\|\varrho^{-1}\right\|_{L^\infty} < \infty$$

ist die Behauptung auch im Fall $r = p$ richtig. Die zweite Behauptung folgt analog. ∎

***Bemerkung* 2.1.3.** Im Fall $r = p$ des obigen Beweises kann man die Voraussetzung $-1 < \gamma, \delta < 0$ zu $-1 < \gamma, \delta \leqslant 0$ abschwächen.

Betrachten wir nun einen Banachraum X mit einer Norm $\|\cdot\|_X$, der stetig in einen Hilbertraum H mit Norm $\|\cdot\|_H$ eingebettet ist. Das bedeutet gerade

$$\|x-y\|_H \leqslant C\,\|x-y\|_X \quad \text{für alle} \quad x, y \in X$$

mit einem $C > 0$. Sei nun $\varphi \in H^* \simeq H$. Dann ist φ auch ein stetiges lineares Funktional auf X, denn es gilt für alle $x, y \in X$

$$|\langle\varphi, x\rangle_H - \langle\varphi, y\rangle_H| = |\langle\varphi, x-y\rangle_H| \leqslant \|\varphi\|_H\,\|x-y\|_H \leqslant C\,\|\varphi\|_H\,\|x-y\|_X\ ,$$

was zeigt, dass die Operatornorm von $\varphi \in X^*$ durch $C\,\|\varphi\|_H$ beschränkt ist, also $\varphi \in X^*$.

Folgerung 2.1.4. *Sei $p \geqslant 2$. Gelten*

$$-1 < \gamma, \delta < \frac{p}{2} - 1 \quad \textit{falls} \quad p > 2$$

beziehungsweise

$$-1 < \gamma, \delta \leqslant 0 \quad \textit{im Fall} \quad p = 2\,,$$

so gilt

$$L^p(\varrho) \subset L^2 \subset L^q(\sigma)\,.$$

Beweis. Im Hilfssatz 2.1.2 setze man r=2, verwende Bemerkung 2.1.3 sowie die darauf folgende Betrachtung. ∎

2.2 Der singuläre Integraloperator

Seien $D \subset \mathbb{R}$ und $x \in D$. Mit

$$D_\varepsilon(x) := \{y \in D \mid |y - x| \geqslant \varepsilon\}$$

setzen wir für eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, deren Integral über $D_\varepsilon(x)$ endlich ist,

$$\text{v. p.} \int_D f(y)\, \mathrm{d}y := \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{D_\varepsilon(x)} f(y)\, \mathrm{d}y\,.$$

Existiert dieser Grenzwert, so nennen wir ihn den **Cauchyschen Hauptwert** des Integrals (v.p. steht für „valeur principale“).

Mit H^μ, $0 < \mu \leqslant 1$, bezeichnen wir den Raum der Funktionen, die auf dem kompakten Intervall $[-a, a]$ der Bedingung

$$|u(x) - u(y)| \leqslant C|x - y|^\mu \quad \forall x, y \in [-a, a] \quad \textbf{(Hölder-Bedingung)}$$

für ein $C > 0$ genügen. Diese Funktionen sind stetig und mit der Norm

$$\|u\|_{H^\mu} := \|u\|_\infty + \sup_{x,y \in [-a,a]} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\mu}$$

wird H^μ zu einem Banachraum. Für $\mu = 1$ erhalten wir als Spezialfall den Raum der Lipschitz-stetigen Funktionen.

Wir führen nun an dieser Stelle das Cauchysche singuläre Integral über dem kompakten Intervall $\Omega = [-a, a]$ ein:

Definition 2.2.1. Der durch die Gleichung

$$(Su)(x) := \frac{1}{\pi} \int_{-a}^{a} \frac{u(y)}{y - x}\, \mathrm{d}y := \frac{1}{\pi}\, \text{v. p.} \int_{-a}^{a} \frac{u(y)}{y - x}\, \mathrm{d}y\,. \tag{2.4}$$

beschriebene Operator heißt **(Cauchyscher) singulärer Integraloperator**. Die Funktion $c(y, x) = (y - x)^{-1}$ wird **Cauchyscher Kern** genannt. Da wir uns hier nicht ausschließlich auf ein reelles (später auch unbeschränktes) Intervall beschränken werden, scheiben wir zur besseren Unterscheidung im Fall eines nichtreellen Integrationsgebietes auch τ anstatt y und z anstatt x.

Der folgende Hilfssatz gibt bereits eine große Klasse von Funktionen, auf der dieser Operator zumindest wohldefiniert ist.

Hilfssatz 2.2.2. *Sei $u \in H^\mu$. Dann existiert das singuläre Integral (2.4) für alle inneren Punkte $x \in [-a, a]$.*

Beweis. Sei x innerer Punkt von $[-a, a]$. Es gilt

$$\int_{D_\varepsilon(x)} \frac{u(y)}{y-x}\,\mathrm{d}y = \int_{D_\varepsilon(x)} \frac{u(y)-u(x)}{y-x}\,\mathrm{d}y + u(x)\int_{D_\varepsilon(x)} \frac{1}{y-x}\,\mathrm{d}y\,. \tag{2.5}$$

Wegen $u \in H^\mu$ gilt

$$\left|\frac{u(y)-u(x)}{y-x}\right| \leqslant C\,|y-x|^{\mu-1}$$

und wir sehen, dass das erste Integral der rechten Seite für $\varepsilon \to 0$ endlich ist.

Für das zweite Integral der rechten Seite existiert der Cauchysche Hauptwert:

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{D_\varepsilon(x)} \frac{1}{y-x}\,\mathrm{d}y &= \ln|y-x|\Big|_{-a}^{x-\varepsilon} + \ln|y-x|\Big|_{x+\varepsilon}^{a} \\
&= \ln\varepsilon - \ln|-a-x| + \ln|a-x| - \ln\varepsilon \\
&= \ln\frac{|a-x|}{|a+x|}\,.
\end{aligned}$$

Also bleibt das Integral (2.5) für $\varepsilon \to 0$ endlich und damit ist der Hilfssatz bewiesen. ∎

Man kann dieses Resultat allerdings auch auf Integrationsbereiche bestimmter Kurvensysteme verallgemeinern (siehe [10]).

Definition 2.2.3. Sei Γ eine orientierte Jordankurve in der komplexen Ebene.

(i) Γ heißt **Ljapunow-Kurve**, falls sie einer **Ljapunow-Bedingung** genügt, d.h. wenn sie eine Parametrisierung der Klasse C^1 besitzt und der Winkel $\Theta_\Gamma(z)$ zwischen der Tangente im Punkt $z \in \Gamma$ und der reellen Achse in positiver Richtung einer Hölder-Bedingung

$$|\Theta_\Gamma(z_1) - \Theta_\Gamma(z_2)| \leqslant C|z_1 - z_2|^\alpha\,, \quad z_1, z_2 \in \Gamma,$$

für ein $C > 0$ und $0 < \alpha < 1$ genügt (beispielsweise der Einheitskreis in $\mathbb{C}$). Jede Ljapunow-Kurve ist doppelpunktfrei und rektifizierbar.

(ii) Die endliche Vereinigung geschlossener oder offener Ljapunowscher Kurven, die keine gemeinsamen Punkte haben heißt **Ljapunowsches Kurvensystem**.

(iii) Ein **stückweises Ljapunowsches Kurvensystem** ist die Gesamtheit endlich vieler offener Ljapunow-Kurven $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$, die höchstens endlich viele gemeinsame Punkte besitzen und außerdem der folgenden Bedingung genügen: Wenn Γ_j und Γ_k einen gemeinsamen Punkt z_0 haben, dann ist entweder $\Gamma_j \cup \Gamma_k$ eine Ljapunow-Kurve, oder die Tangenten der Kurven Γ_j und Γ_k stimmen im Punkt z_0 nicht überein. Da die Kurven Γ_j, $j = 1, \ldots, n$ orientiert sind, gilt dies auch für das Kurvensystem. Punkte die Endpunkte mindestens einer Kurve sind heißen **Knoten** und alle übrigen Punkte heißen **regulär**. Ein Punkt, der Endpunkt genau einer Kurve ist heißt **Endpunkt des Kurvensystems** und die übrigen Knoten, von denen mehrere Kurven Γ_j ausgehen heißen **Eckpunkte**. Damit ist jedes Ljapunowsche Kurvensystem auch ein stückweises Ljapunowsches Kurvensystem.

Damit beweist man folgende Verallgemeinerung fast analog:

Hilfssatz 2.2.4. *Erfüllt die (komplexe) Funktion u auf dem stückweisen Ljapunowschen Kurvensystem Γ eine Hölder-Bedingung, so existiert das singuläre Integral*

$$(S_\Gamma u)(z) = \frac{1}{\pi i} \int_\Gamma \frac{u(\zeta)}{\zeta - z} \,\mathrm{d}\zeta := \mathrm{v.\,p.}\, \frac{1}{\pi i} \int_\Gamma \frac{u(\zeta)}{\zeta - z} \,\mathrm{d}\zeta$$

für alle regulären Punkte von Γ.

An dieser Stelle seien zwei weitere Resultate aus [10, S. 36–41] ohne Beweis zitiert, die wir später noch benötigen werden. Das erste von beiden gibt eine Bedingung an, unter der eine Substitution im Integral erlaubt ist.

Satz 2.2.5. *Es seien Γ_1 und Γ_2 Ljapunow-Kurven und $\alpha : \Gamma_2 \to \Gamma_1$, $\tau = \alpha(\zeta)$, eine differenzierbare, bijektive Funktion, deren Ableitung auf Γ_2 einer Hölder-Bedingung genüge und verschieden von Null ist. Dann gilt die Formel*

$$\int_{\Gamma_1} \frac{u(\tau)}{\tau - z} \,\mathrm{d}\tau = \int_{\Gamma_2} \frac{u(\alpha(\zeta))\alpha'(\zeta)}{\alpha(\zeta) - \alpha(\xi)} \,\mathrm{d}\zeta$$

mit $z = \alpha(\xi)$, für beliebiges u, dass auf Γ_1 eine Hölder-Bedingung erfüllt.

Für eine Kurve $\Gamma \subset \mathbb{C}$ erkären wir noch den L^p-Raum als

$$L^p(\Gamma) := \left\{ u : \Gamma \to \mathbb{C} \;\middle|\; u \text{ ist messbar und } \int_\Gamma |u(z)|^p \,|\mathrm{d}z| < \infty \right\}$$

mit der Norm $\|u\|_{L^p(\Gamma)} := \left(\int_\Gamma |u(z)|^p \,|\mathrm{d}z| \right)^{1/p}$. $|\mathrm{d}z|$ bezeichnet das Differenzial des Bogenmaßes.

Theorem 2.2.6. *Sei Γ ein stückweises Ljapunowsches Kurvensystem. Für $1 < p < \infty$ ist der singuläre Integraloperator S_Γ beschränkt im Raum $L^p(\Gamma)$. Insbesondere ist S beschränkter Operator im Raum L^p. Im Falle eines geschlossenen Kurvensystems gilt zusätzlich $S_\Gamma^2 = \mathbb{1}$.*

***Bemerkung* 2.2.7.** Die Behauptung von Theorem 2.2.6 ist in den Fällen $p = 1$ und $p = \infty$ nicht richtig (siehe z.B. [26, Kapitel VII]).

Ziel ist es nun zu zeigen, dass der singuläre Integraloperator S auf den Raum $L^p(\varrho)$ beschränkt ist. Um dies zu zeigen, benötigen wir noch eine Hilfsaussage, die belegt, dass der Raum der C_0^∞-Funktionen dicht in $L^p(\varrho)$ ist, woraus insbesondere auch die Dichtheit der (Hölder-)stetigen Funktionen folgt.

Hilfssatz 2.2.8. *Für $1 \leqslant p < \infty$ liegt $C_0^\infty([-a, a])$ dicht in $L^p(\varrho)$.*

Beweis. In unserem Fall gilt für die betrachteten Gewichtsfunktionen $\varrho \in L^1$ und so folgt $C_0^\infty([-a,a]) \subset L^p(\varrho)$. Bleibt die Dichtheit zu zeigen. Bekannter Weise ist $C_0^\infty([-a,a])$ dicht in L^p (siehe z.B. [19, S. 304–305]). Sei jetzt $f \in L^p(\varrho)$. Dann ist $f\varrho^{1/p} \in L^p$ und es gibt eine Folge von C_0^∞-Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die $f\varrho^{1/p}$ approximiert und zusätzlich bereits in einer kleinen Umgebung von $-a$ und a verschwindet (anderenfalls schneide man die Funktionen f_n geeignet ab, so dass diese in einer Umgebung von $-a$ und a verschwinden und C^∞-Funktionen bleiben). Dann sind die Funktionen $f_n\varrho^{-1/p}$ in $C_0^\infty([-a,a])$ und es gilt

$$\left\|f_n\varrho^{-1/p} - f\right\|_{L^p(\varrho)} = \|f_n - f\varrho\|_{L^p} \to 0\,.$$

Damit ist die Behauptung gezeigt. ■

Dem angekündigten Beschränktheitsbeweis des singulären Integraloperators voran stellen wir noch zwei Hilfssätze.

Hilfssatz 2.2.9. *Es seien $x_0 \in [-a,a]$, $1 < p < \infty$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ derart, dass*

$$-\frac{1}{q} < \alpha < \frac{1}{p}\,, \text{wobei} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,. \tag{2.6}$$

Dann ist der durch die Gleichung

$$(Bu)(x) := \int_{-a}^{a} \frac{|y-x_0|^\alpha - |x-x_0|^\alpha}{|y-x||x-x_0|^\alpha} u(y)\,\mathrm{d}y\,, x \in [-a,a]\,, \tag{2.7}$$

beschriebene Operator beschränkt in L^p.

Beweis. Zuerst seien $0 \leqslant \alpha < p^{-1}$ und δ so gewählt, dass $\alpha(p-1) < p\delta < \min\{p-1, 1-\alpha\}$. Wegen $p^{-1} < 1$ wissen wir, dass $|a+b|^\alpha \leqslant |a|^\alpha + |b|^\alpha$ gilt (die Funktion $f(t) := t^\alpha$, $t > 0$, ist wachsend, konkav und erfüllt $f' > 0$). Ersetzen wir dann in der Gleichung $|a+b|^\alpha - |b| \leqslant |a|^\alpha$ a durch $x-y$ und b durch y, so folgt $|x|^\alpha - |y|^\alpha \leqslant |x-y|^\alpha$. Tun wir genau das noch einmal, diesmal mit $b = -x$, so bekommen wir $|y|^\alpha - |x|^\alpha \leqslant |x-y|^\alpha$, also insgesamt

$$||x|^\alpha - |y|^\alpha| \leqslant |x-y|^\alpha\ . \tag{2.8}$$

Für $u \in C([-a,a])$ folgern wir mit (2.8) und der Hölderschen Ungleichung

$$\begin{aligned}
|(Bu)(x)| &\leqslant \frac{1}{|x-x_0|^\alpha}\int_{-a}^{a}\frac{|u(y)|}{|y-x|^{1-\alpha}}\,\mathrm{d}y\\
&= \frac{1}{|x-x_0|^\alpha}\int_{-a}^{a}\frac{|y-x_0|^\delta|u(y)|}{|y-x_0|^\delta|y-x|^{(1-\alpha)(p^{-1}+q^{-1})}}\,\mathrm{d}y\\
&\leqslant \frac{1}{|x-x_0|^\alpha}\left(\int_{-a}^{a}\frac{|y-x_0|^{p\delta}|u(y)|^p}{|y-x|^{1-\alpha}}\,\mathrm{d}y\right)^{1/p}\left(\int_{-a}^{a}\frac{\mathrm{d}y}{|y-x|^{1-\alpha}|y-x_0|^{q\delta}}\right)^{1/q}.
\end{aligned}$$

Für beliebige Zahlen $\beta, \gamma < 1$ mit $\beta + \gamma > 1$ betrachten wir nun das Integral

$$\int_{-a}^{a}\frac{\mathrm{d}y}{|y-x|^\beta|y-x_0|^\gamma}\,.$$

Im Falle $x = x_0$ sehen wir, dass das Integral wegen $\beta + \gamma > 1$ nicht existiert. Ist $x \neq x_0$, zeigt die Substitution $y - x = \zeta(x - x_0)$

$$\int_{-a}^{a} \frac{\mathrm{d}y}{|y-x|^\beta |y-x_0|^\gamma} = \frac{(x-x_0)}{|x-x_0|^{\beta+\gamma}} \int_{\frac{-a-x}{x-x_0}}^{\frac{a-x}{x-x_0}} \frac{\mathrm{d}\zeta}{|\zeta|^\beta |\zeta+1|^\gamma} \leqslant \frac{\tilde{C}}{|x-x_0|^{\beta+\gamma-1}} \tag{2.9}$$

mit einem $\tilde{C} \in (0, \infty)$. Man beachte, dass das Vorzeichen von $x - x_0$ und das Vorzeichen des Integrals im mittleren Term übereinstimmen und weiter, dass das Integral, wegen $\beta, \gamma < 1$ (insbesondere an den Singularitäten) endlich ist. Insgesamt gilt die Abschätzung (2.9) also für f.a. $x \in [-a, a]$. Es gilt $0 < p\delta < 1 - \alpha < 1$ und weil $\alpha < p\delta(p-1)^{-1} = q\delta$ ist auch $1 - \alpha + p\delta > 1$. Mit der anfänglichen Abschätzung für $|(Bu)(x)|$ ergibt sich dann unter Verwendung von (2.9)

$$|(Bu)(x)| \leqslant \frac{C}{|x-x_0|^{\delta+\alpha/p}} \left(\int_{-a}^{a} \frac{|y-x_0|^{p\delta} |u(y)|^p}{|y-x|^{1-\alpha}} \,\mathrm{d}y \right)^{1/p} \tag{2.10}$$

mit $C := \tilde{C}^{1/q}$. Hieraus folgern wir

$$\begin{aligned}
\|Bu\|_{L^p}^p &= \int_{-a}^{a} |(Bu)(x)|^p \,\mathrm{d}x \\
&\leqslant C^p \int_{-a}^{a} \frac{1}{|x-x_0|^{p\delta+\alpha}} \int_{-a}^{a} \frac{|y-x_0|^{p\delta}|u(y)|^p}{|y-x|^{1-\alpha}} \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= C^p \int_{-a}^{a} \frac{|u(y)|^p}{|y-x_0|^{-p\delta}} \int_{-a}^{a} \frac{1}{|x-y|^{1-\alpha}|x-x_0|^{p\delta+\alpha}} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&\leqslant C^p \int_{-a}^{a} \frac{|u(y)|^p}{|y-x_0|^{-p\delta}} \frac{\hat{C}}{|y-x_0|^{p\delta}} \,\mathrm{d}y \\
&= C^p \hat{C} \, \|u\|_{L^p}^p \ ,
\end{aligned}$$

wobei in der letzten Abschätzung die Ungleichung (2.9) (auf Grund von $p\delta + \alpha + 1 - \alpha = p\delta + 1 > 1$, $1 - \alpha < 1$ und $p\delta + \alpha < 1 - \alpha + \alpha = 1$) verwendet wurde. Der Operator $B : C([-a, a]) \to L^p$ ist also ein beschränkter Operator. Weil $C([-a, a])$ dicht in L^p ist, folgt die Behauptung im ersten Fall. Sei nun $-q^{-1} < \alpha < 0$. Nach dem oben bewiesenen ist dann der durch

$$(Tv)(x) := \int_{-a}^{a} \frac{|x-x_0|^{-\alpha} - |y-x_0|^{-\alpha}}{|x-y||y-x_0|^{-\alpha}} v(y)\,\mathrm{d}y$$

definierte Operator beschränkt in L^q. Es gilt allerdings

$$\begin{aligned}
\langle Tv, u \rangle &= \int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} \frac{|x-x_0|^{-\alpha} - |y-x_0|^{-\alpha}}{|x-y||y-x_0|^{-\alpha}} v(y)u(x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} \frac{|x-x_0|^{-\alpha} - |y-x_0|^{-\alpha}}{|x-y||y-x_0|^{-\alpha}} \frac{|y-x_0|^{\alpha}|x-x_0|^{\alpha}}{|y-x_0|^{\alpha}|x-x_0|^{\alpha}} v(y)u(x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} \frac{|y-x_0|^{\alpha} - |x-x_0|^{\alpha}}{|y-x||x-x_0|^{\alpha}} u(x)v(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \langle v, Bu \rangle \ .
\end{aligned}$$

Das bedeutet, dass T der zu B duale Operator in L^q ist ($T^* = B$) und da ein linearer Operator genau dann beschränkt ist, wenn es sein dualer Operator ist, so ist auch B beschränkt und alles ist bewiesen. ■

Hilfssatz 2.2.10. *Seien* $1 < p < \infty$ *und* $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ *mit*

$$-\frac{1}{q} < \alpha_1, \alpha_2 < \frac{1}{p} \quad \textit{und} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,.$$

Weiter sei $h(x) := (a-x)^{\alpha_1}(a+x)^{\alpha_2}$, $x \in [-a,a]$. *Dann ist der Operator* $A = h^{-1}Sh\mathbb{1}$ *ein beschränkter Operator in* L^p.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ hinreichend klein. Wir vereinbaren die Bezeichnungen $I_0 := (-\varepsilon, \varepsilon)$, $I_1 := [-a, -\varepsilon]$ und $I_2 := [\varepsilon, a]$. Weiter bezeichne $R_k := \chi_k \mathbb{1}$ den Multiplikationsoperator mit der Indikatorfunktion χ_k der Menge I_k (woraus $\|R_k\| = 1$ folgt), $k = 0,1,2$. Dann kann man den Operator A in folgender Form schreiben:

$$A = (R_0 + R_1 + R_2)A(R_0 + R_1 + R_2) = \sum_{j,k=0}^{2} R_j A R_k\,.$$

Mithin genügt es also die Beschränktheit jedes einzelnen Operators R_jAR_k zu zeigen. Um dies zu bewerkstelligen, unterscheiden wir vier Fälle.

(i) Gelte $j = k \neq 0$. Dann haben wir $R_kAR_k = gA_kf\mathbb{1}$ mit

$$\begin{aligned} g_k(x) &:= \chi_k h(x)^{-1}(a+(-1)^k x)^{\alpha_k}\,, \quad f_k(x) := \chi_k h(x)(a+(-1)^k y)^{-\alpha_k} \\ A_k &:= (a+(-1)^k x)^{-\alpha_k} S (a+(-1)^k y)^{\alpha_k}\mathbb{1}\,. \end{aligned}$$

Damit hat der Operator $A_k - S$ die Darstellung (man beachte die Positivität von Ausdrücken der Form $(a \pm x)$)

$$\begin{aligned} [(A_k - S)u](x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a} \frac{(a+(-1)^k y)^{\alpha_k} - (a+(-1)^k x)^{\alpha_k}}{(y-x)(a+(-1)^k x)^{\alpha_k}} u(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{[-a,a]\cap\{y \geqslant x\}} \frac{|(a+(-1)^k y|^{\alpha_k} - |a+(-1)^k x|^{\alpha_k}}{|y-x||a+(-1)^k x|^{\alpha_k}} u(y)\,\mathrm{d}y \\ &\quad -\frac{1}{\pi}\int_{[-a,a]\cap\{y < x\}} \frac{|a+(-1)^k y|^{\alpha_k} - |a+(-1)^k x|^{\alpha_k}}{|y-x||a+(-1)^k x|^{\alpha_k}} u(y)\,\mathrm{d}y\,. \end{aligned}$$

Es folgt dann mit Hilfssatz 2.2.9

$$\|(A_k - S)u\|_{L^p} \leqslant C\,\|u\|_{L^p}\,, \quad C > 0\,,$$

was die Beschränktheit von $A_k - S$ nach sich zieht. Da nach Theorem 2.2.6 der singuläre Operator S beschränkt ist, folgt dies auch für A_k. Hieraus ergibt sich nun zu guter Letzt, wegen der Beschränktheit der Funktionen f_k und g_k, dass auch R_kAR_k beschränkt in L^p ist.

(ii) Es gelten $j \neq k$, $j \neq 0$ und $k \neq 0$. Hier gilt dann $|y-x| \geqslant \varepsilon$ für $x \in I_j$ und $y \in I_k$ und folglich unter Verwendung der Hölderschen Ungleichung

$$\begin{aligned} |(R_jAR_ku)(x)| &\leqslant \frac{\chi_j(x)}{\pi h(x)} \int_{I_k} \frac{|h(y)u(y)|}{|y-x|}\,\mathrm{d}y \\ &\leqslant \frac{\chi_j(x)}{\pi\varepsilon h(x)} \|u\|_{L^p} \|h\|_{L^q} \\ &\leqslant \frac{\|u\|_{L^p} \|h\|_{L^q}}{\pi\varepsilon h(x)} . \end{aligned}$$

Weiter folgen aus $-q^{-1} < \alpha_1, \alpha_2 < p^{-1}$, dass $-1 < q\alpha_k$ und $-1 < q\alpha_k$, $k = 1, 2$, was $h \in L^q$ und $h^{-1} \in L^p$ zeigt. Insgesamt haben wir dann die Abschätzung

$$\|R_jAR_ku\|_{L^p} \leqslant \frac{\|h^{-1}\|_{L^p} \|h\|_{L^q}}{\varepsilon\pi} \|u\|_{L^p}$$

erhalten und damit ist R_jAR_k beschränkt in L^p.

(iii) Seien $j \neq k$, $j = 0$ oder $k = 0$. Dann gilt $R_jR_k = 0$. Mit der Bezeichnung $R := R_j + R_k = \chi_{I_j \cup I_k}$ gilt dann $R_jAR_k = R_jRARR_k$. Nach (i) ist der Operator RAR beschränkt und auf Grund der Beschränktheit der Operatoren R_j und R_k ist dann auch R_jAR_k beschränkt in L^p.

(iv) Sei nun $j = k = 0$. Da die Funktion h auf I_0 positiv, stetig und beschränkt ist, existieren ihr Maximum $M > 0$ und ihr Minimum $m > 0$. Dann gilt auf Grund der Beschränktheit von S nach Theorem 2.2.6

$$\|R_0AR_0u\|_{L^p} = \left\|R_0h^{-1}ShR_0u\right\|_{L^p} \leqslant \left(\frac{M}{m}\right)^p \|S\| \, \|u\|_{L^p}$$

und der Hilfssatz ist bewiesen. ■

Theorem 2.2.11. *Für $1 < p < \infty$ und Gewichtsfunktionen $\varrho(x) = (a-x)^\gamma (a+x)^\delta$ mit $-1 < \gamma, \delta < p-1$ ist der Operator S in $L^p(\varrho)$ beschränkt.*

Beweis. Zuerst sehen wir, dass der Operator $\varrho^{1/p}\mathbb{1}$ (per Definition der Räume $L^p(\varrho)$) einen isometrischen Isomorphismus von $L^p(\varrho)$ nach L^p definiert. Damit ist der Operator $S : L^p(\varrho) \to L^p(\varrho)$ genau dann beschränkt, wenn der Operator $\varrho^{1/p}S\varrho^{-1/p}\mathbb{1} : L^p \to L^p$ beschränkt ist. Wegen $-1 < \gamma < p-1$ gilt nun

$$\frac{1}{p} > -\frac{\gamma}{p} > \frac{1-p}{p} = -\frac{1}{q} ,$$

was bedeutet, dass die Funktion $h(x) := \varrho(x)$ die Voraussetzungen von Hilfssatz 2.2.10 erfüllt und so folgt die Beschränktheit von $\varrho^{1/p}S\varrho^{-1/p}\mathbb{1}$, also auch die Behauptung. ■

***Bemerkung* 2.2.12.** Auch dieses Resultat bleibt richtig, wenn der singuläre Operator, in diesem Fall bezeichnet mit S_Γ, in einem mit der Funktion $\varrho(z) := \prod_{k=1}^{n} |z - z_k|^{\gamma_k}$ gewichteten L^p-Raum über einem Ljapunowschen Kurvensystem Γ wirkt, wobei der Raum erklärt sei als

$$L^p(\Gamma, \varrho) := \left\{ u \mid u \text{ ist messbar und } u\varrho^{1/p} \in L^p(\Gamma) \right\}$$

und

$$-1 < \gamma_k < p - 1 \,, \quad k = 1, \ldots, n$$

und $z_k \in \Gamma$ gelten mögen. Im Fall eines geschlossenen Kurvensystems Γ gilt zusätzlich $S_\Gamma^2 = \mathbb{1}$ (siehe [10, S. 42–45]).

Satz 2.2.13. *Für $u \in L^p(\varrho)$ und $v \in L^q(\sigma)$ gilt die Beziehung*

$$\int_{-a}^{a} v(x) \int_{-a}^{a} \frac{u(y)}{y - x} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{a} u(y) \int_{-a}^{a} \frac{v(x)}{y - x} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$$

und so insbesondere

$$\langle v, Su \rangle = - \langle Sv, u \rangle \;. \tag{2.11}$$

Der duale Operator zu S in $L^q(\sigma)$ ist also gegeben durch $-S$. $\langle \cdot, \cdot \rangle : L^q(\sigma) \times L^p(\varrho) \to \mathbb{R}$ bezeichnet wie üblich die Dualitätspaarung.

Beweis. Nach Theorem 2.2.11 ist S beschränkt in $L^p(\varrho)$ und weil die Gewichtsfunktion σ ebenfalls die Voraussetzungen des Theorems erfüllt, ist S auch beschränkt in $L^q(\sigma)$. Für festes $x \in [-a, a]$ und beliebiges $y \in [-a, a]$ setzen wir nun

$$u_n(y) := \begin{cases} u(y) \,, & \text{für} \quad |y - x| \geqslant 1/n \\ 0 \,, & \text{für} \quad |y - x| < 1/n \,. \end{cases}$$

Dann gilt $\|u - u_n\|_{L^p(\varrho)} \to 0$ (Satz von Lebesgue) und weil S stetig ist $\|\pi Su - \pi Su_n\|_{L^p(\varrho)} \to 0$ für $n \to \infty$. Wegen Abschätzung (2.1) in Satz 2.1.1 gilt dann

$$|\langle v, \pi Su \rangle - \langle v, \pi Su_n \rangle| = |\langle v, \pi Su - \pi Su_n \rangle| \leqslant \|v\|_{L^q(\sigma)} \|\pi(Su - Su_n)\|_{L^p(\varrho)} \to 0 \,.$$

für $n \to \infty$. Mit anderen Worten also

$$\int_{-a}^{a} v(x) \int_{-a}^{a} \frac{u(y)}{y - x} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \lim_{n \to \infty} \int_{-a}^{a} v(x) \int_{-a}^{a} \frac{u_n(y)}{y - x} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x \,.$$

Im letzten Integral kann man die Integrationsreihenfolge vertauschen und da per Definition von u_n offenbar die Identität $v(x)u_n(y) = v_n(x)u(y)$ gilt, erhalten wir

$$\int_{-a}^{a} v(x) \int_{-a}^{a} \frac{u(y)}{y - x} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \lim_{n \to \infty} \int_{-a}^{a} u(y) \int_{-a}^{a} \frac{v_n(x)}{y - x} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_{-a}^{a} u(y) \int_{-a}^{a} \frac{v(x)}{y - x} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x \,.$$

Damit folgt auch sofort die Formel $\langle v, Su \rangle = - \langle Sv, u \rangle$. ∎

Folgerung 2.2.14. *Sei $2 \leqslant p < \infty$. Mit den Voraussetzungen von Folgerung 2.1.4, d.h.*

$$-1 < \gamma, \delta < \frac{p}{2} - 1 \quad \textit{falls} \quad p > 2$$

beziehungsweise

$$-1 < \gamma, \delta \leqslant 0 \quad \textit{im Fall} \quad p = 2\,,$$

ist S ein beschränkter Operator von $L^p(\varrho)$ nach $L^p(\sigma)$ und es gilt

$$\langle Su, u \rangle = 0 \quad \textit{für} \quad u \in L^p(\varrho)\,,$$

Insbesondere ist λS für jedes reelle λ in diesem Fall ein monotoner Operator.

Beweis. Nach Folgerung 2.1.4 ist die Einbettung $L^p(\varrho) \hookrightarrow L^q(\sigma)$ richtig. Mit Satz 2.2.13 folgt dann die Behauptung. ■

Zusätzlich definieren wir noch die Operatoren S_k, $k = 0, 1, 2, 3$, durch die Gleichungen

$$(S_k u)(x) := -r_k(x)^{-1}(S r_k u)(x) \tag{2.12}$$

mit $r_0(x) := (a^2 - x^2)^{-1/2}$, $r_1(x) := (a - x)^{-1/2}(a + x)^{1/2}$, $r_2(x) := (a - x)^{1/2}(a + x)^{-1/2}$ und $r_3(x) := (a^2 - x^2)^{1/2}$.

Folgerung 2.2.15. *Seien $1 < p < \infty$ und $\varrho_k(x) := (a - x)^{\gamma_k}(a + x)^{\delta_k}$ für $k = 0, 1, 2, 3$ mit*

$$-1 - \frac{p}{2} < \gamma_0, \delta_0, \gamma_1, \delta_2 < \frac{p}{2} - 1 \quad \textit{und} \quad -1 + \frac{p}{2} < \delta_1, \gamma_2 \gamma_3, \delta_3 < \frac{3p}{2} - 1\,. \tag{2.13}$$

Dann ist $S_k : L^p(\varrho_k) \to L^p(\varrho_k)$ beschränkt. Insbesondere ist S_0 für $p > 2$ ein beschränkter Operator von L^p nach L^q.

Beweis. In Analogie zum Beweis von Theorem 2.2.11 ist der Operator $r_k \mathbb{1}$ ein Isometrischer Isomorphismus von $L^p(\varrho_k)$ nach $L^p(r_k^{-p}\varrho_k)$. Die Gewichtsfunktion $r_k^{-p}\varrho_k$ erfüllt mit den Voraussetzungen (2.13) die Voraussetzungen von Theorem 2.2.11 und somit ist der Operator der singulären Integration ein beschränkter Operator in $L^p(r_k^{-p}\varrho_k)$. Nun ist aber der Operator $r_k^{-1}\mathbb{1}$ gerade der inverse, isometrische Isomorphismus von $r_k \mathbb{1}$ und bildet also die Funktion $S(r_k u)$ wieder in $L^p(\varrho_k)$ ab, was die Beschränktheit von S_k in $L^p(\varrho_k)$ nach sich zieht.

Um den Zusatz zu zeigen, beachte man, dass der Operator $r_0 \mathbb{1}$ ein Isometrischer Isomorphismus von L^p nach $L^p(r_k^{-p})$ und dass die Gewichtsfunktion r_0^{-p} die Voraussetzungen von Theorem 2.2.11 erfüllt, was bedeutet, dass S ein beschränkter Operator von $L^p(r_k^{-p})$ in sich ist. Der Operator $r_0^{-1}\mathbb{1}$ ist nun wieder invers zu $r_0 \mathbb{1}$ und bildet zurück in L^p ab. Bezeichnet q den dualen Exponenten zu p, so ist wegen $p > 2$ gerade $q < 2 < p$, woraus die Einbettung $L^p \hookrightarrow L^q$ folgt und alles ist gezeigt. ■

Mit diesem Wissen und den Vertauschungsformeln von Poincaré-Bertrand ([10, S. 50 ff]) lassen sich nun in verschiedenen Räumen Inversionsformeln für das singuläre Integral finden.

Theorem 2.2.16. *Seien $1 < p < \infty$ und $u \in L^p(\varrho)$. Dann gelten die folgenden Beziehungen:*

(i)

$$S_0 S u = u\,, \quad S S_0 u = u - C_0$$

falls $\gamma, \delta < p/2 - 1$ mit der Konstanten

$$C_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^{a} r_0(\xi) u(\xi)\, \mathrm{d}\xi\,.$$

(ii)

$$S_1 S u = S S_1 u = u$$

falls $\gamma < p/2 - 1, \delta < p - 1$.

(iii)

$$S_2 S u = S S_2 u = u$$

falls $\gamma < p - 1, \delta < p/2 - 1$.

(iv)

$$S_3 S u = u - C r_0\,, \quad S S_3 u = u$$

falls $\gamma, \delta < p - 1$ mit der Konstanten

$$C = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^{a} u(\xi)\, \mathrm{d}\xi\,.$$

Insbesondere ist S_1 invers zu S in jedem $L^p(\varrho)$-Raum mit $-1 < \gamma < p/2 - 1$, $-1 + p/2 < \delta < p - 1$ und S_2 ist invers zu S in jedem $L^p(\varrho)$-Raum mit $-1 + p/2 < \gamma < p - 1$, $-1 < \delta < p/2 - 1$.

Beweis. Wir beweisen nur Punkt (i) und benutzen dazu die Formel von Poincaré-Bertrand. Die anderen Punkte lassen sich analog beweisen. Zunächst können wir die Vertauschungsformel nur für Hölderstetige Gewichte und Funktionen u anwenden (Das Gewicht r_0 ist nicht Hölder-stetig, lässt sich jedoch in einem geeigneten L^r-Raum – S ist dann dort stetig – durch Hölder-stetige Funktionen approximieren, z.B. durch Abschneiden in einer kleinen Umgebung des Randes). Damit folgen

$$\begin{aligned}
\pi^2 (S_0 S u)(x) &= -(a^2 - x^2)^{1/2} \int_{-a}^{a} \frac{1}{y - x} \int_{-a}^{a} \frac{(a^2 - y^2)^{-1/2} u(t)}{t - y}\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}y \\
&= \pi^2 u(x) + \int_{-a}^{a} \int_{-a}^{a} \frac{(a^2 - y^2)^{-1/2} u(t)}{(y - x)(t - y)}\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}t \\
&= \pi^2 u(x) + \int_{-a}^{a} \frac{u(t)}{t - x} \left\{ \int_{-a}^{a} \frac{(a^2 - y^2)^{-1/2}}{y - x} - \frac{(a^2 - y^2)^{-1/2}}{y - t}\, \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\pi^2(SS_0u)(x) &= \int_{-a}^{a} \frac{1}{y-x} \int_{-a}^{a} \frac{-(a^2-y^2)^{1/2}(a^2-t^2)^{-1/2}u(t)}{t-y}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y \\
&= \pi^2 u(x) + \int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} \frac{-(a^2-y^2)^{1/2}(a^2-t^2)^{-1/2}u(t)}{(y-x)(t-y)}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t \\
&= \pi^2 u(x) + \int_{-a}^{a} \frac{(a^2-t^2)^{-1/2}u(t)}{t-x} \left\{ \int_{-a}^{a} \frac{(a^2-y^2)^{1/2}}{y-t} - \frac{(a^2-y^2)^{1/2}}{y-x}\,\mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Mit den Formeln ([17])

$$\int_{-a}^{a} \frac{(a^2-y^2)^{-1/2}}{y-x}\,\mathrm{d}y = 0 \quad \text{und} \quad \frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a} \frac{(a^2-y^2)^{1/2}}{y-x}\,\mathrm{d}y = -x$$

bekommen wir das Gewünschte

$$S_0Su = u \quad \text{und} SS_0u = u - \frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a} r_0(\xi)u(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

im dichten Teilraum der Hölderstetigen Funktionen, also auch im $L^p(\varrho)$. ■

Weiter definieren wir für $p > 2$ noch den linearen Teilraum $L^{p,0}$ von L^p als

$$L^{p,0} := \left\{ u \in L^p \;\middle|\; C_0 = \int_{-a}^{a} r_0(\xi)u(\xi)\,\mathrm{d}\xi = 0 \right\}. \tag{2.14}$$

Hilfssatz 2.2.17. *Sei $p > 2$. Die Operatoren $S : L^p \to L^{p,0}$ und $S_0 : L^{p,0} \to L^p$ sind beschränkt, bijektiv und zueinander invers. Es gelten die Beziehungen*

$$\langle Su, u\rangle = 0 \quad \text{für } u \in L^p \qquad \langle S_0u, u\rangle = 0 \quad \text{für } u \in L^{p,0}\,.$$

Beweis. Die Beschränktheit der Operatoren S und S_0 folgt aus den Aussagen von Theorem 2.2.11 und Folgerung 2.2.15. Für S bleibt zu zeigen, dass $Su \in L^{p,0}$, $u \in L^p$. Dies sieht man anhand von Theorem 2.2.16(i). Es gilt nämlich $Su - C_0 = SS_0(Su) = S(S_0Su) = Su$, woraus sofort $C_0 = 0$ folgt. Es folgen nun mit dem letzten Theorem ebenfalls unmittelbar $S_0S = \mathbb{1}_{L^p}$ und $SS_0 = \mathbb{1}_{L^{p,0}}$. Weiter gelten wegen Folgerung 2.2.14 $\langle Su, u\rangle = 0$,$u \in L^p$, und $0 = \langle SS_0u, S_0u\rangle = \langle S_0u, SS_0u\rangle = \langle S_0u, u\rangle$, $u \in L^{p,0}$. Damit ist alles gezeigt. ■

Abschließend stellen wir noch fest, dass, im Fall $p > 2$, der Operator $S : L^p \to L^q$ monotoner Operator ist, $S_0 : L^p \to L^q$ jedoch nicht.

2.3 Die Hilbert-Transformation

Im Fall des (unbeschränkten) Integrationsgebietes der reellen Achse, kommt dem singulären Integral, welches durch die Gleichung

$$(Hu)(x) := \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{u(y)}{y-x} \, \mathrm{d}y \,, \quad x \in \mathbb{R} \,, \tag{2.15}$$

beschrieben ist, eine besondere Bedeutung zu. Das Integral (2.15) ist wieder durch seinen Cauchyschen Hauptwert zu interpretieren und wird **Hilbert-Transformation** genannt. Es gelten hier ähnliche Beziehungen, wie sie für den singulären Operator S in L^p gelten. Das folgende Theorem geht auf M. Riesz zurück, wobei wir uns im Beweis jedoch wieder an der Monographie von Michlin und Prößdorf ([10]) orientieren werden.

Theorem 2.3.1. *Sei $1 < p < \infty$. Dann definiert die Hilbert-Transformation einen linearen, beschränkten Operator im Raum $L^p(\mathbb{R})$ und es gelten die Formeln*

$$\langle v, Hu \rangle = - \langle Hv, u \rangle \quad \textit{für} \quad u \in L^p(\mathbb{R}) \,, \quad v \in L^q(\mathbb{R}) \,,$$

$H^2 = \mathbb{1}$ in $L^p(\mathbb{R})$ und insbesondere

$$\langle Hu, u \rangle = 0 \quad \textit{im Raum} \quad L^2(\mathbb{R}) \,.$$

Weiter ist λH linear und monoton im Raum $L^2(\mathbb{R})$ für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$.

Beweis. Es bezeichnen $\Gamma := \partial K_1(0) \subset \mathbb{C}$ den komplexen Einheitskreis und $\gamma := p - 2$. Dann bildet die Möbiustransformation

$$M(z) := i \frac{z+1}{z-1} \,, \quad z \in K_1(0) \,,$$

den Einheitskreis auf die reelle Achse ab (an der Singularität $z = 1$ nimmt sie genau die Werte $\pm\infty$ an, je nach dem, ob man sich vom 1. oder 4. Quadranten aus annähert). Sei weiter $\varrho(z) := |z-1|^\gamma$. Da offenbar $-1 < p - 2 < p - 1$ gilt, erfüllt die Funktion ϱ die Bedingung einer Gewichtsfunktion in Bemerkung 2.2.12 und so ist der singuläre Integraloperator S_Γ beschränkt in $L^p(\Gamma, \varrho)$ und es gilt, da Γ geschlossen ist, $S_\Gamma^2 = S_\Gamma$. Weiter ist der durch die Gleichung

$$\varphi(z) := (Bu)(z) := \frac{1}{\xi - 1} u(M(z))$$

beschriebene Operator ein beschränkter Operator vom Raum $L^p(\mathbb{R})$ nach $L^p(\Gamma, \varrho)$:

$$\begin{aligned} \|Bu\|^p_{L^p(\Gamma,\varrho)} &= \int_\Gamma |u(M(z))|^p |z-1|^{-p} \varrho(z) \, \mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |u(y)|^p |z-1|^{p-2} |z-1|^{-p} |z-1|^2 \, \mathrm{d}y = \frac{1}{2} \|u\|_{L^p(\mathbb{R})} \,, \end{aligned}$$

wobei die Substitution $y = M(z)$ verwendet wurde. Man rechnet leicht nach, dass der zu B inverse Operator durch die Gleichung

$$(B^{-1}\varphi)(y) = \frac{2i}{y-i}\varphi\left(\frac{y+i}{y-i}\right)$$

gegeben ist. Also ist der Operator $B^{-1}S_\Gamma B$ beschränkt in $L^p(\mathbb{R})$.

Sei nun $u \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Dann ist wegen des kompakten Trägers von u der Satz 2.2.5 anwendbar und es folgt

$$\begin{aligned}(B^{-1}S_\Gamma Bu)(y) &= \frac{2i}{\pi(y-i)}\int_\Gamma \frac{u(M(z))}{(z-1)\left(z-\dfrac{y+i}{y-i}\right)}\,\mathrm{d}z = \frac{2i}{\pi(y-i)}\frac{i}{2}\int_\mathbb{R} \frac{u(x)(z-1)}{z-\dfrac{y+i}{y-i}}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{\pi(y-i)}\int_\mathbb{R}\frac{u(x)\left(\dfrac{x+i}{x-i}-1\right)}{\dfrac{x+i}{x-i}-\dfrac{y+i}{y-i}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_\mathbb{R}\frac{u(x)}{x-y}\,\mathrm{d}x = (Hu)(y)\,, \qquad (2.16)\end{aligned}$$

wobei die Substitution $x = M(z)$ angewandt wurde. Zu beachten ist hier, dass die Funktion $u(M(z))$ wegen ihres kompakten Trägers in einer gewissen Umgebung des Punktes $z = 1$ verschwindet und dass die Funktion $M'(z) = -2i(z-1)^{-2}$ auf dem Träger von u, da sie dort differenzierbar ist, einer Hölder-Bedingung genügt. Damit haben wir $\|Hu\|_{L^p(\mathbb{R})} = \|B^{-1}S_\Gamma Bu\|_{L^p(\mathbb{R})}$ für $C_0^\infty(\mathbb{R})$-Funktionen. Da diese aber dicht in $L^p(\mathbb{R})$ sind, folgt aus (2.16) auch sofort die Beschränktheit von H in $L^p(\mathbb{R})$.

Unter Benutzung von (2.16) und Theorem 2.2.6 folgt weiter sofort die Identität $H^2 = \mathbb{1}$.

Sei nun $v \in L^q(\mathbb{R})$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Dann folgt mit den gleichen Argumenten, wie in Satz 2.2.13 die Vertauschbarkeit der singulären Integration mit dem gewöhnlichen Integral und so bekommen wir die Identität $\langle v, Hu\rangle = -\langle Hv, u\rangle$. Zu guter Letzt sehen wir, dass damit in $L^2(\mathbb{R})$ die Identität $\langle Hu, u\rangle = -\langle u, Hu\rangle = -\langle Hu, u\rangle = 0$ gilt, woraus folgt, dass H und λH für jede reelle Zahl λ monotone Operatoren sind. Damit ist das Theorem bewiesen. ■

***Bemerkung* 2.3.2.** Die Behauptungen von Theorem 2.3.1 bleiben, mit Ausnahme von $H^2 = \mathbb{1}$, auch im Fall des Raumes $L^p((0,\infty))$, $1 < p < \infty$ richtig.

2.4 Das singuläre Integral mit Hilbertschem Kern

Wir betrachten nun anstatt der Cauchyschen Kernfunktion $c(\tau, z) = (\tau - z)^{-1}$ die **Hilbertsche Kernfunktion**

$$h(\psi, s) := \frac{1}{2}\cot\left(\frac{\psi - s}{2}\right) .$$

Mit der Parametrisierung $\tau(\psi) = e^{i\psi}$, $y \in [-\pi, \pi]$, für den Einheitskreis $\Gamma = \partial K_1(0)$ ergibt sich dann $\mathrm{d}\tau/\,\mathrm{d}\psi = ie^{i\psi}$. Anhand der Additionstheoreme für Winkelfunktionen finden wir nun

$$\begin{aligned} 2\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau - z} - \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau} &= 2i\left(\frac{1 - e^{i(\psi - s)}}{2 - 2\cos(\psi - s)} - i\right)\mathrm{d}\psi \\ &= i\left(\frac{1 - \cos(\psi - s) - i\sin(\psi - s)}{1 - \cos(\psi - s)} - 1\right)\mathrm{d}\psi \\ &= \frac{\sin(\psi - s)}{1 - \cos(\psi - s)}\,\mathrm{d}\psi \\ &= \cot\left(\frac{\psi - s}{2}\right)\mathrm{d}\psi \quad \text{mit } z = e^{is},\ s \in [-\pi, \pi]. \end{aligned}$$

Für die Differenz des Cauchyschen und des Hilbertschen Kernes ergibt sich also

$$\frac{\mathrm{d}y}{y - x} - \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{1}{2}\cot\left(\frac{\psi - s}{2}\right)\mathrm{d}\psi \tag{2.17}$$

und vermöge dieser Gleichung auch

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u\left(e^{i\psi}\right)\cot\left(\frac{\psi - s}{2}\right)\mathrm{d}\psi = (iS_\Gamma u)(x) - \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \frac{u(\tau)}{\tau}\,\mathrm{d}\tau\,. \tag{2.18}$$

Nun ist das letzte Integral, das wir mit $F(u)$ bezeichnen wollen, ein lineares Funktional auf $L^p(\Gamma)$, welches unter Beachtung der Hölderschen Ungleichung der Abschätzung

$$\begin{aligned} |F(u)| &= \left|\int_\Gamma \frac{u(\tau)}{\tau}\,\mathrm{d}\tau\right| = \left|\int_{-\pi}^{\pi} \frac{u\left(e^{is}\right)}{e^{is}} ie^{is}\,\mathrm{d}s\right| \\ &\leqslant \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\left|u\left(e^{is}\right)\right|}{\left|e^{is}\right|}\left|ie^{is}\right|\,\mathrm{d}s = \int_\Gamma |u(\tau)|\,|\mathrm{d}\tau| \\ &\leqslant \left(\int_\Gamma |u(\tau)|^p\,|\mathrm{d}\tau|\right)^{1/p}\left(\int_\Gamma |\mathrm{d}\tau|\right)^{1/q} \\ &= (2\pi)^{-q}\,\|u\|_{L^p(\Gamma)} \end{aligned}$$

genügt und damit stetig ist. Dies benutzen wir, um die Norm der rechten Seite von (2.18) abzuschätzen:

$$\begin{aligned} \left\|S_\Gamma u - \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \frac{u(\tau)}{\tau}\,\mathrm{d}\tau\right\|_{L^p(\Gamma)} &\leqslant \|S_\Gamma u\|_{L^p(\Gamma)} + \frac{1}{2\pi}\|F(u)\|_{L^p(\Gamma)} \\ &\leqslant \|S_\Gamma\|\,\|u\|_{L^p(\Gamma)} + \left(\int_\Gamma (2\pi)^{p/q}\,\|u\|^p_{L^p(\Gamma)}\right)^{1/p} \\ &= (\|S_\Gamma\| + 2\pi)\,\|u\|_{L^p(\Gamma)}\,. \end{aligned}$$

Wir erhalten also

$$\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} u\left(e^{is}\right)\cot\left(\frac{\psi - s}{2}\right)\mathrm{d}\psi\right|^p\mathrm{d}s\right)^{1/p} \leqslant C\,\|u\|_{L^p(\Gamma)}\,, \quad C > 0\,.$$

Da der Operator $T : L^p(\Gamma) \to L^p([-\pi,\pi])$, gemäß $(Tu)(s) := u(e^{is})$, einen isometrischen Isomorphismus definiert, wobei der Inverse Operator gegeben ist durch $(T^{-1}u)(z) = u(\arg z)$, können wir die Funktion $u \in L^p([-\pi,\pi])$ mit ihrem Urbild unter T identifizieren. Wir schreiben der Einfachheit halber $u(z)$ für diese Funktion. Insgesamt haben wir damit das folgende Theorem gezeigt:

Theorem 2.4.1. *Für $1 < p < \infty$ ist der Operator $\mathcal{H}$, gemäß*

$$(\mathcal{H}u)(s) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(\psi) \cot\left(\frac{\psi - s}{2}\right) \mathrm{d}\psi \,, \tag{2.19}$$

ein beschränkter linearer Operator im Raum $L^p([-\pi,\pi])$.

Der singuläre Operator $\mathcal{H}$ wird **Hilbertscher Integraloperator** oder ebenfalls Hilberttransformation genannt.

Satz 2.4.2. *Für $u \in L^p([-\pi,\pi])$ und $v \in L^q([-\pi,\pi])$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, gilt die Beziehung*

$$\langle v, \mathcal{H}u \rangle = - \langle \mathcal{H}v, u \rangle \ .$$

Insbesondere ist $\lambda\mathcal{H} : L^p([-\pi,\pi]) \to L^q([-\pi,\pi])$ im Fall $p \geqslant 2$ für jedes reelle λ ein monotoner Operator.

Beweis. Für beliebiges $\psi \in [-\pi,\pi]$ und festes $s \in [-\pi,\pi]$ definieren wir die Funktionenfolge

$$u_n(\psi) := \begin{cases} u(\psi) \,, & \text{für} \quad \psi - s \in \bigcup_{k=-2}^{1} [k\pi + 1/n, (k+1)\pi - 1/n] \\ 0 \,, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt $\|u - u_n\|_{L^p([-\pi,\pi])} \to 0$ (Satz von Lebesgue) und wegen Theorem 2.4.1 auch $\mathcal{H}u_n \to \mathcal{H}u$ in $L^p([-\pi,\pi])$. Mit den gleichen Argumenten wie in Satz 2.2.13 folgt dann

$$\int_{-\pi}^{\pi} v(s) \int_{-\pi}^{\pi} u(\psi) \cot\left(\frac{\psi - s}{2}\right) \mathrm{d}\psi \, \mathrm{d}s = \int_{-\pi}^{\pi} u(\psi) \int_{-\pi}^{\pi} v(s) \cot\left(\frac{\psi - s}{2}\right) \mathrm{d}s \, \mathrm{d}\psi \,.$$

Weiter folgt dann die behauptete Identität

$$\langle v, \mathcal{H}u \rangle = - \langle \mathcal{H}v, u \rangle$$

wegen der Antisymmetrie des Kotangens. ∎

Folgerung 2.4.3. *Es gilt die Umkehrformel*

$$\mathcal{H}^2 u = -u + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(\sigma) \, \mathrm{d}\sigma \,, \quad u \in L^p([-\pi,\pi]) \,.$$

Beweis. Aus der Differenz (2.17) erhält man leicht die Identität

$$\frac{\mathrm{d}y}{y-x} = \frac{1}{2}\cot\left(\frac{\psi - s}{2}\right)\,\mathrm{d}\psi + \frac{i}{2}\,\mathrm{d}\psi\,. \tag{2.20}$$

Damit ergibt sich nun $\mathcal{H}u + i/(2\pi)G(u) = iS_\Gamma u$ mit

$$G(u) := \int_{-\pi}^{\pi} u(s)\,\mathrm{d}s\,.$$

Wegen $S_\Gamma^2 = \mathbb{1}$ erhalten wir aus dieser Beziehung

$$\mathcal{H}^2 u + \frac{i}{2\pi}\left(\mathcal{H}(G(u)) + G(\mathcal{H}(u))\right) - \frac{1}{4\pi^2}G(G(u)) = -u\,. \tag{2.21}$$

Dabei gilt $1/(4\pi^2)G(G(u)) = 1/(2\pi)G(u)$ und für den Klammerterm errechnen wir

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(G(u)) + G(\mathcal{H}(u)) &= \frac{1}{2\pi}G(u)\int_{-\pi}^{\pi}\cot\left(\frac{\psi - s}{2}\right)\,\mathrm{d}\psi + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(\psi)\cot\left(\frac{\psi - s}{2}\right)\,\mathrm{d}\psi\,\mathrm{d}s\\
&= \frac{1}{2\pi}G(u)\int_{-\pi}^{\pi}\cot\left(\frac{\psi - s}{2}\right)\,\mathrm{d}\psi - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(\psi)\int_{-\pi}^{\pi}\cot\left(\frac{s-\psi}{2}\right)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\psi\,,
\end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit aus Satz 2.4.2 folgt und zusätzlich die Antisymmetrie des Kotangens ausgenutzt wurde. Jedoch errechnet man mit der Stammfunktion $\ln|\sin(x)|$ der Funktion $\cot(x)$ leicht, dass der Cauchysche Hauptwert des Integrals

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cot\left(\frac{\psi - s}{2}\right)\,\mathrm{d}\psi\,,\quad s\in[-\pi,\pi]\,,$$

verschwindet. Also gilt $\mathcal{H}(G(u)) + G(\mathcal{H}(u)) = 0$. Aus Gleichung (2.21) erhalten wir dann

$$\mathcal{H}^2 u = -u + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(s)\,\mathrm{d}s\,,$$

womit die Folgerung bewiesen ist. ■

In Analogie zu (2.14) definieren wir noch

$$L^{p,0}([-\pi,\pi]) := \left\{u\in L^p([-\pi,\pi])\;\middle|\;\int_{-\pi}^{\pi}u(s)\,\mathrm{d}s = 0\right\}\,.$$

Folgerung 2.4.4. *Für $p>1$ ist der Operator $\mathcal{H} : L^p([-\pi,\pi]) \to L^{p,0}([-\pi,\pi])$ beschränkt und surjektiv und der Operator $\mathcal{H} : L^{p,0}([-\pi,\pi]) \to L^{p,0}([-\pi,\pi])$ ist bijektiv.*

Beweis. Zuerst bemerken wir unter Verwendung von Satz 2.4.2

$$\int_{-\pi}^{\pi}(\mathcal{H}u)(s)\,\mathrm{d}s = \int_{-\pi}^{\pi}u(\psi)\int_{-\pi}^{\pi}\cot\left(\frac{\psi - s}{2}\right)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\psi = 0\,,$$

da der Cauchysche Hauptwert des Kotangens verschwindet. Für $u \in L^p([-\pi,\pi])$ ist also $\mathcal{H}u \in L^{p,0}([-\pi,\pi])$. Sei nun $v \in L^{p,0}([-\pi,\pi])$. Dann gilt $-v = \mathcal{H}^2 v = \mathcal{H}(\mathcal{H}v)$. Wir wählen also $u = -\mathcal{H}v$ um die Operatorgleichung $\mathcal{H}u = v$ zu lösen und erhalten die Surjektivität von $\mathcal{H} : L^p([-\pi,\pi]) \to L^{p,0}([-\pi,\pi])$. Das selbe Argument zeigt auch die Surjektivität von $\mathcal{H} : L^{p,0}([-\pi,\pi]) \to L^{p,0}([-\pi,\pi])$. Sei nun $u \in \ker \mathcal{H}$ im Raum $L^{p,0}([-\pi,\pi])$. Dann folgt sofort $0 = \mathcal{H}u = \mathcal{H}^2 u = -u$, also $u = 0$, was die Injektivität und folglich Bijektivität in diesem Raum zeigt. Die Beschränktheit der Operatoren ist eine Konsequenz von Theorem 2.4.1. ■

3 Nichtlineare Integralgleichungen

3.1 Der Nemickii-Operator im L^p mit Gewicht

Definition 3.1.1. Es seien $G \subset \mathbb{R}^N$ ein Gebiet und $f : G \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion die der **Caratéodory-Bedingung** genüge, d.h.

$$\begin{aligned} f(\cdot, \eta) : G \to \mathbb{R} \qquad & \text{ist messbar auf } G \text{ für alle } \eta \in \mathbb{R}\,, \\ f(x, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad & \text{ist stetig für fast alle } x \in G\,. \end{aligned}$$

Dann ist der mit der **Carathéorory-Funktion** f assoziierte **Nemickii-Operator** F definiert als

$$(Fu)(x) := f(x, u(x))$$

mit einer Funktion $u : G \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$.

Satz 3.1.2. *Die Carathéodory-Funktion f genüge der Wachstumsbedingung*

$$|f(x,\eta)| \leqslant A(x) + B\sigma(x)|\eta|^{q/p} \quad \text{f.ü. in } G \tag{3.1}$$

mit einem $B > 0$, $A \in L^p(G, \varrho)$ und $1 < p, q < \infty$, wobei die Gewichtsfunktionen ϱ und $\sigma := \varrho^{1-q}$ f.ü. endliche, nichtnegative, messbare reelle Funktionen sind (z.B. durch (2.2) und (2.3) gegeben).

Dann ist der mit f assoziierte Nemickii-Operator

$$F : L^q(G, \sigma) \to L^p(G, \varrho)$$

stetig und beschränkt. Es gilt die Abschätzung

$$\|Fu\|^p_{L^p(G,\varrho)} \leqslant C\left(\|A\|^p_{L^p(G,\varrho)} + B^p\,\|u\|^q_{L^q(G,\sigma)}\right)\,. \tag{3.2}$$

Beweis. (i) Wir zeigen die Messbarkeit von Fu. Da u in $L^q(G,\sigma)$ ist, ist $x \mapsto u(x)$ messbar. Also können wir die Funktion u mit einer Folge (u_n) von Elementarfunktionen f.ü. in G approximieren. Wegen der Stetigkeit von f in der zweiten Variablen (Carathéodory-Bedingung) folgt

$$(Fu)(x) = f(x, u(x)) = \lim_{n\to\infty} f(x, u_n(x)).$$

Wir wählen eine Darstellung der Treppenfunktion und erhalten

$$f(x, u_n(x)) = f(x, \sum_{j=0}^{M(n)} \alpha_j^n \chi_{G_j^n}(x)) = \sum_{j=0}^{M(n)} f(x, \alpha_j^n)\chi_{G_j^n}(x)$$

mit $\alpha_0^n = 0$ und $G_0^n = G \setminus \bigcup_{k=1}^{M(n)} G_k^n$. Das bedeutet gerade die Messbarkeit der Funktion $f(x, u_n(x))$, da $f(x, \alpha_j^n)$ (auf Grund der Carathéodory-Bedingung) und die Indikatorfunktion messbar sind. Da der Grenzwert messbarer Funktionen messbar ist, folgt dies auch für Fu.

(ii) F ist beschränkt. Für $\xi_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, \ldots, n$, bekommen wir mit der Ungleichung

$$c \sum_{k=1}^{n} |\xi_i|^r \leqslant c \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_i| \right)^r \leqslant C \sum_{k=1}^{n} |\xi|_i^r , \quad 1 \leqslant r < \infty ,$$

die nichts anderes ist als die Äquivalenz von Normen im $\mathbb{R}^n$, und zusammen mit der Wachstumsbedingung (3.1) die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\|Fu\|_{L^p(G,\varrho)}^p &= \int_G |f(x, u(x))|^p \varrho(x) \, \mathrm{d}x \\
&\leqslant \int_G \left(A(x) + B\sigma(x)|u(x)|^{q/p} \right)^p \varrho(x) \, \mathrm{d}x \\
&\leqslant C \int_G |A(x)|^p + B^p \sigma(x)^p |u(x)|^q \varrho(x) \, \mathrm{d}x \\
&= C \int_G |A(x)|^p \varrho(x) + B^p \sigma(x) |u(x)|^q \, \mathrm{d}x \\
&= C \left(\|A\|_{L^p(G,\varrho)}^p + B^p \, \|u\|_{L^q(G,\sigma)}^q \right) .
\end{aligned}$$

Die rechte Seite ist nach Voraussetzung endlich und folglich bildet F beschränkte Mengen in beschränkte ab.

(iii) F ist stetig. Sei (u_n) eine Folge mit $u_n \to u$ in $L^q(G, \sigma)$. Dann gilt $v_n := u_n \sigma^{1/q} \to v := u\sigma^{1/q}$ in $L^q(G)$ und wir können eine Teilfolge v_{n_k} auswählen mit $v_{n_k}(x) \to v(x)$ f.ü. in G. Damit haben wir aber auch $v_{n_k}(x)\sigma(x)^{-1/p} =: u_{n_k}(x) \to u(x)$ f.ü. in G. Es gilt dann

$$\begin{aligned}
|f(x, u_{n_k}(x)) - f(x, u(x))|^p &\leqslant C \left(|f(x, u_{n_k}(x))|^p + |f(x, u(x))|^p \right) \\
&\leqslant C \left(A(x)^p + B^p \sigma(x)^p |u_{n_k}(x)|^q + |f(x, u(x))|^p \right) \\
&=: h_{n_k}(x) .
\end{aligned}$$

Nun folgt für die $L^p(G, \varrho)$-Norm gerade

$$\|Fu_{n_k} - Fu\|_{L^p(G,\varrho)}^p \leqslant \int_G \varrho(x) h_{n_k}(x) \, \mathrm{d}x .$$

Man beachte hier, dass $\varrho A^p \in L^1(G)$ und $\varrho\sigma^p = \sigma$ gelten sowie die in (ii) bewiesene Abschätzung. Insgsamt haben wir also $\varrho h_{n_k} \in L^1(G)$. Der Grenzwert $h(x)$, $k \to \infty$, existiert f.ü. in G und es gilt

$$\int_G \varrho(x) h_{n_k}(x) \, \mathrm{d}x \to \int_G \varrho(x) h(x) \, \mathrm{d}x ,$$

da $u_n \to u$ in $L^q(G,\sigma)$. Außerdem gilt $(Fu_{n_k})(x) \to (Fu)(x)$ f.ü. in G, $k \to \infty$, denn f ist auf Grund der Carathéodory-Bedingung stetig in der zweiten Variablen. Mit Satz 1.1.10, dem verallgemeinerten Satz von Lebesgue, erhalten wir dann

$$\|Fu_{n_k} - Fu\|^p_{L^p(G,\varrho)} = \|(Fu_{n_k} - Fu)^p \varrho\|_{L^1(G)} \to 0$$

für $k \to \infty$. Da diese Argumentation für jede konvergente Teilfolge greift, bekommen wir mit Hilfsatz 1.1.4 (iv) gerade $Fu_n \to Fu$ in $L^p(G,\varrho)$. ∎

Der Beweis wurde für unseren Fall der gewichteten L^p-Räume aus der Literatur adaptiert ([14]). Als Konsequenz erhalten wir nun leicht weitere Eigenschaften des Nemickii-Operators, indem wir stärkere Forderungen an f stellen.

Folgerung 3.1.3. *Sei f eine f.ü. (streng) monotone Carathéodory-Funktion, d.h. es gelte*

$$(f(x,\eta) - f(x,\zeta))\,(\eta - \zeta) \geqslant 0 \quad \text{für f.a. } x \in G \text{ für alle } \eta,\zeta \in \mathbb{R}$$

($>$ bei strenger Monotonie) und f genüge der Wachstumsbedingung (3.1). Dann ist der mit f assoziierte Nemickii-Operator $F : L^q(G,\sigma) \to L^p(G\varrho)$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, stetig, beschränkt und (strikt) monoton.

Beweis. Aus der Ungleichung

$$\langle Fu - Fv, u - v\rangle = \int_G \underbrace{(f(x,u(x)) - f(x,v(x)))(u(x) - v(x))}_{\geqslant 0 \text{ f.ü. in } G}\,\mathrm{d}x \geqslant 0\,, \quad u,v \in L^q(G,\sigma)\,,$$

($>$ bei strenger Monotonie) und dem vorangehenden Satz folgt sofort die Behauptung. ∎

Folgerung 3.1.4. *Die Carathéodory-Funktion f erfülle die Koerzivitätsbedingung*

$$f(x,\eta)\eta \geqslant C\sigma(x)|\eta|^p - D(x) \quad \text{für f.a. } x \in G \text{ für alle } \eta \in \mathbb{R}$$

und f genüge der Wachstumsbedingung (3.1). Dann ist der mit f assoziierte Nemickii-Operator $F : L^q(G,\sigma) \to L^p(G,\varrho)$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, stetig, beschränkt und koerziv.

Beweis. Sei $u \in L^q(G,\sigma)$. Integration der Koerzivitätsbedingung liefert

$$\langle Fu, u\rangle \geqslant C\int_G |u|^q \sigma\,\mathrm{d}x - \int_G D\,\mathrm{d}x$$

und damit auch

$$\frac{\langle Fu, u\rangle}{\|u\|_{L^q(G,\sigma)}} \geqslant C\,\|u\|^{p-1}_{L^q(G,\sigma)} - \frac{\|D\|_{L^1(G)}}{\|u\|_{L^q(G,\sigma)}} \to \infty\,,$$

falls $\|u\|_{L^q(G,\sigma)} \to \infty$. Der Rest wurde bereits gezeigt und alles ist bewiesen. ∎

3.2 Integralgleichungen vom Hammersteinschen Typ

In diesem Abschnitt ist es unser Ziel eine Existenz- und Eindeutigkeitsaussage für Lösungen von Gleichungen des Typs

$$u + (\lambda S + K)Fu = g \tag{3.3}$$

abzuleiten. Hierbei bezeichnen S einen singulären Integraloperator vom Cauchy-Typ, λ einen reellen Parameter, F einen Nemickii-Operator und K einen weiteren (möglicherweise nichtlinearen) monotonen Operator. Im Fall $\lambda = 0$ enthält die Operatorgleichung (3.3) insbesondere den Spezialfall einer Hammersteinschen Gleichung

$$u(x) + \int_G K(x,y) f(x, u(x))\,\mathrm{d}y = g(x)$$

einer gesuchten Funktion u über einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$ mit einer Kernfunktion K, einer für alle Werte von u erklärten Funktion f und gegebener rechter Seite g. Benannt ist dieser wichtige Typ von (nichtlinearen) Integralgleichungen nach A. Hammerstein, der diese Gleichungen als einer der ersten studierte ([8]).

Wir wenden uns zuerst der abstakten Hammerstein-Gleichung

$$u + KFu = g \tag{3.4}$$

zu und wollen anhand des folgenden Konvergenzprinzips notwendige Kriterien für die Existenz von Lösungen in einigen speziellen Räumen ableiten. In diesem Abschnitt setzen wir ferner stillschweigend $p^{-1} + q^{-1} = 1$ voraus.

Hilfssatz 3.2.1. *Seien X ein reflexiver reeller Banachraum und seien $K : X \to X^*$ und $F : X^* \to X$ zwei monotone, hemistetige Operatoren. Weiter seien Folgen $(u_n), (w_n) \subset X^*$ und $(v_n) \subset X$ mit den folgenden Eigenschaften vorgegeben:*

(i) $u_n \rightharpoonup u$ *in* X^*,

(ii) $v_n \rightharpoonup v$ *in* X,

(iii) $Fu_n \rightharpoonup v$ *in* X,

(iv) $Kv_n \rightharpoonup g - u$ *in* X^*,

(v) $\langle w_n, Fu_n \rangle - \langle Kv_n, v_n \rangle \to 0$,

(vi) $\langle g_n, Fu_n \rangle \to \langle g, v \rangle$ *mit* $g_n := u_n + w_n$.

Dann folgt bereits $u + KFu = g$.

Beweis. Es gilt die Identität

$$\langle u_n - u, Fu_n \rangle = \langle g_n - w_n - u, Fu_n \rangle \ .$$

Weil K monoton ist haben wir $\langle Kv_n - Kv, v_n - v\rangle \geqslant 0$ und erhalten daraus

$$\langle Kv_n, v_n\rangle \geqslant \langle Kv_n, v\rangle + \langle Kv, v_n - v\rangle \ .$$

Folglich bekommen wir wegen (ii) und (iv) die Abschätzung

$$\liminf_{n\to\infty} \langle Kv_n, v_n\rangle \geqslant \langle g - u, v\rangle \ ,$$

woraus wegen (v)

$$\begin{aligned} \langle g - u, v\rangle &\leqslant \liminf_{n\to\infty} \langle Kv_n, v_n\rangle \\ &= \liminf_{n\to\infty} \langle Kv_n, v_n\rangle + \liminf_{n\to\infty}(\langle w_n, Fu_n\rangle - \langle Kv_n, v_n\rangle) \\ &\leqslant \liminf_{n\to\infty} \langle w_n, Fu_n\rangle \end{aligned}$$

folgt. Als Konsequenz ergibt sich unter Verwendung von (iii) und (vi) dann noch

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} \langle u_n - u, Fu_n\rangle &= \limsup_{n\to\infty} \langle g_n - w_n - u, Fu_n\rangle \\ &\leqslant \limsup_{n\to\infty} \langle g_n, Fu_n\rangle - \liminf_{n\to\infty} \langle w_n, Fu_n\rangle - \liminf_{n\to\infty} \langle u, Fu_n\rangle \\ &\leqslant \langle g, v\rangle - \langle g - u, v\rangle - \langle u, v\rangle \\ &= 0\ . \end{aligned}$$

Weil F monoton und hemistetig ist, ist F auch pseudomonoton und folglich auch vom Typ-M. Daher gilt $v = Fu$. Wiederum wegen der Pseudomononotie von F folgt

$$0 \leqslant \liminf_{n\to\infty} \langle u_n - u, Fu_n\rangle$$

und so auch $\langle u_n, Fu_n\rangle \to \langle u, v\rangle$. Weiter folgt mit der Voraussetzung (vi) nun noch $\langle w_n, Fu_n\rangle = \langle g_n - u_n, Fu_n\rangle \to \langle g - u, v\rangle$, so dass wir aus (v)

$$\begin{aligned} 0 &= \limsup_{n\to\infty}(\langle w_n, Fu_n\rangle - \langle Kv_n, v_n\rangle) \\ &\leqslant \limsup_{n\to\infty} \langle w_n, Fu_n\rangle - \liminf_{n\to\infty} \langle Kv_n, v_n\rangle \\ &\leqslant \langle g - u, v\rangle - \langle g - u, v\rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

folgern können, d.h. $\langle Kv_n, v_n\rangle \to \langle g - u, v\rangle$. Insgesamt haben wir nun

$$\langle Kv_n, v_n - v\rangle \to 0\ ,$$

da $Kv_n \rightharpoonup g - u$ in X^* auf Grund von (iv). Weil K (aus dem selben Grund wie F) pseudomonoton und damit auch vom Typ-M ist, folgern wir $g - u = Kv = KFu$ und alles ist bewiesen. ■

Hilfssatz 3.2.2. *Seien $1 < p < \infty$ und $f : G \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monotone Carathéodory-Funktion, die der Wachstumsbedingung*

$$|f(x,\eta)| \leqslant A(x) + B\sigma(x)|\eta|^{q/p}$$

für ein $A \in L^p(G,\varrho)$ und ein $B > 0$ genügt. Dann ist der mit der Folge monotoner Carathéodory-Funktionen

$$f_n(x,\eta) := \begin{cases} f(x,\eta)\,, & \text{falls} \quad |f(x,\eta)| < n \\ n\dfrac{f(x,\eta)}{|f(x,\eta)|}\,, & \text{falls} \quad |f(x,\eta)| \geqslant n \end{cases}$$

assoziierte Nemickii-Operator

$$F_n : L^q(G,\sigma) \to L^p(G,\varrho)\,, \quad \text{gemäß} \quad (F_n u)(x) := f_n(x,u(x))\,,$$

stetig, beschränkt und monoton.

Beweis. Zuerst sehen wir, dass jedes f_n eine Carathéodory-Funktion ist. Wegen der Wachstumsbedingung an f ist diese auch für f_n erfüllt. Damit ist der Operator F_n nach Satz 3.1.2 stetig und beschränkt. Da weiter f_n auf Grund von f auch monoton ist, gilt dies auch für den zugehörigen Nemickii-Operator (Folgerung 3.1.3). ■

Der Beweis des folgenden Theorems orientiert sich am Beweis eines Existenz- und Eindeutigkeitsresultates für eine abstrakte Hammerstein-Gleichung im Raum $L^\infty(G)$, wie er von Brézis und Browder in [1] gegeben wurde. Wird die Wachstumsbedingung an f durch eine Integrierbarkeitsbedingung, nämlich $f(\cdot,\eta) \in L^1(G)$ für alle $\eta \in \mathbb{R}$ ersetzt, gilt ein analoges Theorem (siehe auch [2], [4] und [25]). K und F bilden in diesem Falle die Räume $L^1(G)$ und $L^\infty(G)$ beziehungsweise $L^\infty(G)$ und $L^1(G)$ in einander ab.

Theorem 3.2.3. *Seien $1 < p < \infty$, $G \subset \mathbb{R}$ messbar und ϱ eine f.ü. endliche, nichtnegative, messbare reelle Funktion, sowie $\sigma = \varrho^{1-q}$. Es mögen weiter die folgenden Bedingungen erfüllt sein:*

(i) $K : L^p(G,\varrho) \to L^q(G,\sigma)$ *ist monoton, hemistetig und beschränkt.*

(ii) $f : G \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ist monotone Carathéodory-Funktion und genüge für f.a. $x \in G$ der Wachstumsbedingung*

$$|f(x,\eta)| \leqslant A(x) + B\sigma(x)|\eta|^{q/p} \quad \text{für alle } \eta \in \mathbb{R} \tag{3.5}$$

mit einer Funktion $A \in L^p(G,\varrho)$ und einem $B > 0$. Weiter sei $F : L^q(G,\sigma) \to L^p(G,\varrho)$ der zu f gehörige Nemickii-Operator.

Dann besitzt die Gleichung (3.4) für jedes $g \in L^q(G,\sigma)$ eine eindeutige Lösung $u \in L^q(G,\sigma)$.

***Bemerkung* 3.2.4.** Da das Maß des gewichteten L^p-Raumes, $\varrho\lambda$, bezüglich des Lebesgue-Maßes λ absolut stetig ist, d.h. jede Lebesgue-Nullmenge ist eine $\varrho\lambda$-Nullmenge, lehrt die Maßtheorie, dass $\varrho\lambda$ ein σ-endliches Maß ist, da $\lambda(\{\varrho = +\infty\}) = 0$ und da das Lebesgue-Maß σ-endlich ist. Es gibt unter den Voraussetzungen von Theorem 3.2.3 also eine isotone Folge (G_n) messbarer Mengen mit

$$\varrho\lambda(G_n) = \int_{G_n} \varrho(x)\,\mathrm{d}x < \infty$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$.

Beweis des Theorems. (i) Existenz der Lösung: Durch eine Verschiebung können wir o.E.d.A. annehmen, dass $f(x,0) = 0$ und $K0 = 0$ (man führe sich vor Augen, dass man Gleichung (3.4) auch als $u + \tilde{K}\tilde{F} = \tilde{g}$ schreiben kann, wobei $\tilde{F}u = Fu - F0$, $\tilde{K}v = K(v + F(0)) - KF0$ und $\tilde{g} = g - KF0$ gesetzt seien und dass die Eigenschaften der Operatoren unter der Verschiebung erhalten bleiben). Sei nun (G_n) eine isotone Folge messbarer Mengen endlichen Maßes mit $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ und es bezeichne χ_n die Indikatorfunktion der Menge G_n. Ferner setzen wir

$$f_n(x,\eta) := \begin{cases} f(x,\eta)\,, & \text{falls} \quad |f(x,\eta)| < n \\ n\dfrac{f(x,\eta)}{|f(x,\eta)|}\,, & \text{falls} \quad |f(x,\eta)| \geqslant n \end{cases}$$

und bezeichnen mit F_n den zu jedem f_n gehörigen Nemickii-Operator. Dann besitzt die Gleichung

$$u_n + \chi_n K \chi_n F_n u_n = \chi_n g \tag{3.6}$$

eine Lösung in $L^q(G,\sigma)$. Um dies zu verifizieren, betrachten wir den Operator $\chi_n F_n : L^q(G,\sigma) \to L^p(G,\varrho)$ und sehen

$$\langle \chi_n F_n u - \chi_n F_n v, u - v\rangle = \int_G \chi_n(f_n(x,u(x)) - f_n(x,v(x)))(u(x) - v(x))\,\mathrm{d}x \geqslant 0\,,$$

da der Integrand auf Grund der Monotonie von f_n nichtnegativ ist. Nach Hilfsatz 3.2.2 ist F_n stetig (und so insbesondere hemistetig), beschränkt und monoton, also auch $\chi_n F_n$. Mittels Hemistetigkeit und Monotonie erhalten wir insbesondere die maximale Monotonie von $\chi_n F_n$. Nun ist damit aber auch der (mehrwertige) inverse Operator $T : L^p(G,\varrho) \to 2^{L^q(G,\sigma)}$, gemäß

$$Tv = \{w \in L^q(G,\sigma) \mid v(x) = \chi_n f_n(x,w(x)) \text{ f.ü. in } G\}\,,$$

maximal monoton und für $v \in \mathcal{D}(T) \subset L^p(G,\varrho)$ gilt zusätzlich die Abschätzung

$$\|v\|^p_{L^p(G,\varrho)} = \int_{G_n} |f_n(x,v(x))|^p \varrho(x)\,\mathrm{d}x \leqslant n^p \int_{G_n} \varrho(x)\,\mathrm{d}x < \infty\,,$$

d.h. $\mathcal{D}(T)$ ist beschränkt in $L^p(G,\varrho)$. Weiter ist der Operator $K_n := \chi_n K \chi_n : L^p(G,\varrho) \to L^q(G,\sigma)$ monoton, hemistetig und beschränkt, da dies für K gilt und für $v \in \mathcal{D}(T)$ haben wir

$$K_n v + Tv = \{\chi_n K \chi_n F_n w + w \mid w \in Tv\} \ .$$

Browder in [5] folgend (siehe Theoreme 2 und 4) gilt nun $\mathcal{R}(K_n + T) = L^q(G,\sigma)$, was die Lösbarkeit von (3.6) für jedes $n \in \mathbb{N}$ bedeutet.

Aus der Monotonie von K_n folgt nun aus (3.6) nach Multiplikation mit $F_n u_n$ die Abschätzung

$$0 \leqslant \langle u_n, F_n u_n\rangle \leqslant \langle \chi_n g, F_n\rangle \leqslant \langle g, F_n u_n\rangle \ , \tag{3.7}$$

wobei wir von den Annahmen $K0 = 0$ und $f(x,0) = 0$ Gebrauch gemacht haben. Andererseits gilt

$$\begin{aligned}
\langle u_n, F_n u_n\rangle &= \int_{|u_n|\geqslant 2|g|} |u_n||F_n u_n| \,\mathrm{d}x + \int_{|u_n|<2|g|} |u_n||F_n u_n| \,\mathrm{d}x \\
&\geqslant 2\int_{|u_n|\geqslant 2|g|} |g||F_n u_n| \,\mathrm{d}x - 2\int_{|u_n|<2|g|} |g||F_n u_n| \,\mathrm{d}x \\
&= 2\int_G |g||F_n u_n| \,\mathrm{d}x - 4\int_{|u_n|<2|g|} |g||F_n u_n| \,\mathrm{d}x \ .
\end{aligned}$$

In Kombination mit (3.7) erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_G |g||F_n u_n| \,\mathrm{d}x &\leqslant 4\int_{|u_n|<2|g|} |g||F_n u_n| \,\mathrm{d}x \\
&\leqslant 4\,\|g\|_{L^q(G,\sigma)} \left(\int_{|u_n|<2|g|} |F_n u_n|^p \varrho \,\mathrm{d}x\right)^{1/p} \\
&\leqslant 4\,\|g\|_{L^q(G,\sigma)} \left(\int_{|u_n|<2|g|} C_0 \left(|A(x)|^p\varrho(x) + B^p\sigma(x)^p\sigma(x)^{1-p}|u_n(x)|^q\right) \,\mathrm{d}x\right)^{1/p} \\
&\leqslant 4\,\|g\|_{L^q(G,\sigma)}\, C_0^{1/p} \left(\int_G |A(x)|^p\varrho(x) + B^p\sigma(x)|g|^q \,\mathrm{d}x\right)^{1/p} \\
&\leqslant 4\,\|g\|_{L^q(G,\sigma)}\, C_0^{1/p} \left(\|A\|_{L^p(G,\varrho)} + B\,\|g\|_{L^q(G,\sigma)}^{q/p}\right) \\
&=: C
\end{aligned}$$

mit gewissen Konstanten $C, C_0 > 0$, wobei von der Hölder-Ungleichung, der Wachstumsbedingung an f und der Monotonie von f Gebrauch gemacht wurden. Aus der Wachstumsbedingung erhalten wir außerdem die Ungleichung

$$|f(x,\eta)|^{p/q} \leqslant D(A(x)^{p/q} + B^{p/q}\sigma(x)^{p/q}|\eta|)$$

mit einem gewissen $D > 0$. Insgesamt folgern wir daraus unter Verwendung der Tatsache $\sigma^{p/q} = \varrho^{-1}$

$$|\eta| \geqslant B^{-p/q}D^{-1}\varrho(x)\left(|f(x,\eta)|^{p/q} - DA(x)^{p/q}\right) \ . \tag{3.8}$$

Diese Ungleichung ist wohlbemerkt auch richtig für $f_n(x,\eta)$, denn diese Funktion lässt sich (im Betrag) nach oben gegen $f(x,\eta)$ abschätzen. Mit dieser unteren Abschätzung für $|\eta|$ erhalten wir ferner

$$\begin{aligned}
\int_G |u_n||F_n u_n| \,\mathrm{d}x &\geqslant B^{-p/q} D^{-1} \int_G |F_n u_n|^{p/q+1} \varrho(x) \,\mathrm{d}x - B^{-p/q} \int_G A(x)^{p/q} \varrho(x) |F_n u_n| \,\mathrm{d}x \\
&= B^{-p/q} D^{-1} \|F_n u_n\|^p_{L^p(G,\varrho)} - B^{-p/q} \int_G A(x)^{p/q} \varrho(x)^{1/p+1/q} |F_n u_n| \,\mathrm{d}x \\
&\geqslant B^{-p/q} \left(D^{-1} \|F_n u_n\|^p_{L^p(G,\varrho)} - \varepsilon \|A\|^p_{L^p(G,\varrho)} - \varepsilon^{1-p} \|F_n u_n\|^p_{L^p(G,\varrho)} \right)
\end{aligned}$$

für alle $\varepsilon > 0$, wobei wir im letzten Schritt von der Youngschen Ungleichung

$$|xy| \leqslant \frac{|x|^p}{p} + \frac{|y|^q}{q} \leqslant |x|^p + |y|^q$$

mit $|x| = \varepsilon^{-1/q} \varrho^{1/p} |F_n u_n|$ und $|y| = \varepsilon^{1/q} \varrho^{1/q} A^{p/q}$ Gebrauch gemacht haben. Alles in allem erhalten wir aus diesen Abschätzungen

$$CB^{p/q} + \varepsilon \|A\|^p_{L^p(G,\varrho)} \geqslant (D^{-1} - \varepsilon^{1-p}) \|F_n u_n\|^p_{L^p(G,\varrho)} \tag{3.9}$$

für alle $\varepsilon > 0$. Wählen wir ε genügend groß so sehen wir, dass die Folge $(F_n u_n)$ in $L^p(G,\varrho)$ beschränkt ist. Da der Operator $K : L^p(G,\varrho) \to L^q(G,\sigma)$ beschränkte Mengen in beschränkte Mengen abbildet, schließen wir anhand von (3.6), dass auch die Folge (u_n) in $L^q(G,\sigma)$ beschränkt bleibt. Wir haben also Apriori-Abschätzungen gewonnen.

Durch Extraktion einer Teilfolge können wir nach dem Satz von Eberlein-Šmulian o.E.d.A. annehmen, dass

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{in } L^q(G,\sigma) \quad \text{und} \quad Fu_n \rightharpoonup v \quad \text{in } L^p(G,\varrho).$$

Vermöge der Abschätzung

$$\begin{aligned}
|\langle \chi_n F_n u_n - F u_n, w \rangle| &= \left| \int_G (\chi_n F_n u_n - F u_n) w \,\mathrm{d}x \right| \\
&= \left| \int_{|Fu_n|<n} (\chi_n - 1) w F u_n + \int_{|Fu_n|\geqslant n} \left(\frac{n\chi_n}{|Fu_n|} - 1 \right) w F u_n \,\mathrm{d}x \right| \\
&\leqslant \int_{|Fu_n|<n} |1-\chi_n||w||Fu_n| \,\mathrm{d}x + \int_{|Fu_n|\geqslant n} \left| \frac{n\chi_n}{|Fu_n|} - 1 \right| |w||Fu_n| \,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \left(\int_{|Fu_n|<n} |1-\chi_n|^q |w|^q \sigma \,\mathrm{d}x \right)^{1/q} \left(\int_{|Fu_n|<n} |Fu_n|^p \varrho \,\mathrm{d}x \right)^{1/p} \\
&\quad +2 \left(\int_{|Fu_n|\geqslant n} |w|^q \sigma \,\mathrm{d}x \right)^{1/q} \left(\int_{|Fu_n|\geqslant n} |Fu_n|^p \varrho \,\mathrm{d}x \right)^{1/p} \\
&\leqslant \|(1-\chi_n) w\|_{L^q(G,\sigma)} \|F u_n\|_{L^q(G,\varrho)} \\
&\quad +2 \left(\int_{|Fu_n|\geqslant n} |w|^q \sigma \,\mathrm{d}x \right)^{1/q} \left(\int_{|Fu_n|\geqslant n} |Fu_n|^p \varrho \,\mathrm{d}x \right)^{1/p}
\end{aligned}$$

folgt damit auch $\chi_n F_n u_n \rightharpoonup v$, was sich wie folgt begründet:

Der erste Summand der rechten Seite strebt gegen Null, da die Folge Fu_n in $L^p(G,\varrho)$ beschränkt ist und die Folge der Normen von $(1-\chi_n)w$ gegen Null konvergiert (Satz von Lebesgue). Der letzte Summand der rechten Seite ist für hinreichend großes n ein Integral über eine Nullmenge und folglich Null. Wäre dem nicht so, würde

$$\int_{|Fu_n|\geqslant n} n^p \varrho \,\mathrm{d}x \leqslant \int_{|Fu_n|\geqslant n} |Fu_n|^p \varrho \,\mathrm{d}x \leqslant C(\|A\|^p_{L^p(G,\varrho)} + B^p \|u_n\|^q_{L^q(G,\sigma)}) \leqslant \tilde{C}$$

auf Grund der Beschränktheit von u_n in $L^q(G,\sigma)$ folgen, was für hinreichend großes n einen Widerspruch darstellen würde.

Wir wenden nun Hilfssatz 3.2.1 auf die Folgen $(v_n) := (\chi_n F_n u_n)$, $(w_n) := (\chi_n K v_n)$ und $(g_n) := (\chi_n g)$ an. Wie oben gezeigt, haben wir $u_n \rightharpoonup u$ in $L^q(G,\sigma)$ sowie $Fu_n \rightharpoonup v$ und $v_n \rightharpoonup v$ in $L^p(G,\varrho)$. Ferner haben wir auch $g_n \rightharpoonup g$ in $L^q(G,\sigma)$ und daraus erhalten wir sofort

$$w_n \rightharpoonup g-u \quad \text{und} \quad Kv_n \rightharpoonup g-u \quad \text{in } L^p(G,\varrho).$$

Es bleiben damit die Punkte (v) und (vi) des Hilfssatzes zu zeigen. Es gilt die Identität

$$\begin{aligned} \langle w_n, Fu_n\rangle &= \int_G \chi_n K v_n F u_n \,\mathrm{d}x + \int_G \chi_n K v_n F_n u_n \,\mathrm{d}x - \int_G \chi_n K v_n F_n u_n \,\mathrm{d}x \\ &= \langle Kv_n, v_n\rangle + \langle w_n, Fu_n - F_n u_n\rangle \ , \end{aligned}$$

also folglich

$$\langle w_n, Fu_n\rangle - \langle Kv_n, v_n\rangle = \langle w_n, Fu_n - F_n u_n\rangle \ . \tag{3.10}$$

Da nun für hinreichend großes n die Menge $\{|Fu_n| \geqslant n\}$ eine Nullmenge ist und die Folge (w_n), da schwach konvergent auch notwendig beschränkt ist, schätzen wir die rechte Seite von (3.10) wie folgt ab:

$$\begin{aligned} |\langle w_n, Fu_n - F_n u_n\rangle| &\leqslant \|w_n\|_{L^q(G,\sigma)} \left(\int_G |Fu_n - F_n u_n|^p \varrho \,\mathrm{d}x\right)^{1/p} \\ &\leqslant C\left(\int_{|Fu_n|<n} |Fu_n - Fu_n|^p \varrho \,\mathrm{d}x + \int_{|Fu_n|\geqslant n} \left|Fu_n - \frac{nFu_n}{|Fu_n|}\right|^p \varrho \,\mathrm{d}x\right)^{1/p} \\ &\leqslant 2C\left(\int_{|Fu_n|\geqslant n} |Fu_n|^p \varrho \,\mathrm{d}x\right)^{1/p} \\ &\to 0 \end{aligned}$$

und Punkt (v) ist gezeigt. Zu guter Letzt sehen wir

$$\langle g_n, Fu_n\rangle = \langle g, Fu_n\rangle + \langle(\chi_n - 1)g, Fu_n\rangle \to \langle g, v\rangle \ ,$$

da der letzte Term auf Grund des Satzes von Lebesgue gegen 0 konvergiert und (vi) ist gezeigt. Hilfssatz 3.2.1 liefert nun $u + KFu = g$.

(ii) Eindeutigkeit der Lösung: Seien $u, v \in L^q(G,\sigma)$ Lösungen von (3.4). Dann folgt $u - v + KFu - KFv = 0$ und da K und F monoton sind

$$0 = \langle u - v, Fu - Fv\rangle + \langle KFu - KFv, Fu - Fv\rangle \geqslant \langle u - v, Fu - Fv\rangle \geqslant 0 \,.$$

Nun bekommen wir $Fu = Fv$ und das impliziert unmittelbar $u - v = KFv - KFu = 0$, also $u = v$. ∎

Satz 3.2.5 (Stetige Abhängigkeit). *Unter den Voraussetzungen von Theorem 3.2.3 ist der Operator $F(\mathbb{1} + KF)^{-1}$ stark stetig und falls K zusätzlich stetig ist, so ist auch der inverse Operator $(\mathbb{1} + KF)^{-1}$ stetig.*

Mit diesen Hilfsmitteln können wir nun einige Folgerungen ableiten, wie sie in [22] gegeben werden:

Folgerung 3.2.6. *Es seinen $p \geqslant 2$, die Gewichtsfunktionen ϱ und σ durch (2.2) beziehungsweise (2.3) gegeben, sowie die Voraussetzungen von Hilfssatz 2.1.4 erfüllt. Ferner seien $f : [-a, a] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monotone Carathéodory-Funktion, die für f.a. $x \in [-a, a]$ der Bedingung*

$$|f(x,\eta)| \leqslant A(x) + B|\eta| \quad \text{für alle } \eta \in \mathbb{R} \tag{3.11}$$

und ein $A \in L^p(\varrho)$, $B > 0$, genüge. Bezeichnet F den zu f gehörenden Nemickii-Operator, so besitzt der Operator $-F$ genau einen Fixpunkt in $L^p(\varrho)$.

Beweis. Wir wenden das vorangehende Theorem auf $K = \mathbb{1}_{L^q(\sigma)}$ an, beachten die Einbettung $L^p(\varrho) \subset L^q(\sigma)$ und dass F den Raum $L^p(\varrho)$ in sich abbildet. Dann besitzt die Gleichung $u + Fu = 0$ genau eine Lösung $u \in L^p(\varrho)$, also folgt $-Fu = u$. ∎

Satz 3.2.7. *Es seinen $p \geqslant 2$, die Gewichtsfunktionen ϱ und σ durch (2.2) beziehungsweise (2.3) gegeben, sowie die Voraussetzungen von Hilfssatz 2.1.4 erfüllt. Ferner seien $f : [-a, a] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monotone Carathéodory-Funktion, die für f.a. $x \in [-a, a]$ der Bedingung*

$$|f(x,\eta)| \leqslant A(x) + B\sigma(x)|\eta|^{q-1} \quad \text{für alle } \eta \in \mathbb{R} \tag{3.12}$$

und ein $A \in L^p(\varrho)$, $B > 0$, genüge und $K : L^p(\varrho) \to L^q(\sigma)$ ein linearer, beschränkter, positiver Operator. Bezeichnen F den zu f gehörenden Nemickii-Operator und S das durch (2.4) gegebene singuläre Integral, so besitzt die Operatorgleichung

$$u + (\lambda S + K)Fu = g\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \tag{3.13}$$

für jedes $g \in L^q(\sigma)$ eine eindeutige Lösung $u \in L^q(\sigma)$ und die Lösung hängt stetig von g ab.

Beweis. Wegen $p \geqslant 2$ und den Voraussetzungen von Hilfssatz 2.1.4 haben wir die Einbettung $L^p(\varrho) \subset L^q(\sigma)$. Wir bemerken weiter, dass K auf Grund der Voraussetzungen ein linearer, beschränkter (und damit stetiger), monotoner Operator von $L^p(\varrho)$ in $L^q(\sigma)$ ist und gleiches auch auf λS zutrifft, also auch auf $\lambda S + K$. Die Behauptungen folgen dann mit Theorem 3.2.3 und Satz 3.2.5. ■

Für den Fall, dass K den Raum $L^p(\varrho)$ in sich abbildet, gilt $g-u \in L^p(\varrho)$, denn $Fu \in L^p(\varrho)$ und $Su \in L^p(\varrho)$ (Theorem 2.2.11). Speziell im Fall $K = 0$ ist also $u \in L^p(\varrho)$, wenn $g \in L^p(\varrho)$. Weiterhin haben wir auf Grund von Hilfssatz 2.2.17 im Fall $f \in L^{p,0}$, $p > 2$, auch $u \in L^{p,0}$.

Durch analoge Argumente beweist man auch die beiden folgenden Sätze.

Satz 3.2.8. *Es seinen $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monotone Carathéodory-Funktion, die für f.a. $x \in \mathbb{R}$ der Bedingung*

$$|f(x,\eta)| \leqslant A(x) + B|\eta|^{q-1} \quad \textit{für alle } \eta \in \mathbb{R} \tag{3.14}$$

und ein $A \in L^2(\mathbb{R})$, $B > 0$, genüge und $K : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ ein linearer, beschränkter, positiver Operator. Bezeichnen F den zu f gehörenden Nemickii-Operator und H die Hilbert-Transformation, gegeben durch (2.15). Dann besitzt die Operatorgleichung

$$u + (\lambda H + K)Fu = g\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}\,, \tag{3.15}$$

für jedes $g \in L^2(\mathbb{R})$ eine eindeutige Lösung $u \in L^2(\mathbb{R})$ und die Lösung hängt stetig von g ab.

Satz 3.2.9. *Es sei $p \geqslant 2$. Ferner seien $f : [-\pi,\pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monotone Carathéodory-Funktion, die für f.a. $x \in [-\pi,\pi]$ der Bedingung*

$$|f(x,\eta)| \leqslant A(x) + B|\eta|^{q-1} \quad \textit{für alle } \eta \in \mathbb{R} \tag{3.16}$$

und ein $A \in L^p([-\pi,\pi])$, $B > 0$, genüge und $K : L^p([-\pi,\pi]) \to L^q([-\pi,\pi])$ ein linearer, beschränkter, positiver Operator. Bezeichnen F den zu f gehörenden Nemickii-Operator und $\mathcal{H}$ das durch (2.19) gegebene singuläre Integral, dann besitzt die Operatorgleichung

$$u + (\lambda \mathcal{H} + K)Fu = g\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}\,, \tag{3.17}$$

für jedes $g \in L^q([-\pi,\pi])$ eine eindeutige Lösung $u \in L^q([\pi,\pi])$ und die Lösung hängt stetig von g ab.

***Bemerkung* 3.2.10.** Der Operator K in den Sätzen 3.2.7 bis 3.2.9 muss nicht zwingend linear sein. Die Aussagen bleiben richtig, wenn K in den jeweiligen Räumen stetig, beschränkt und monoton ist.

3.3 Integralgleichungen mit stark nichtlinearen Nemickii-Operatoren

In diesem Abschnitt bezeichne $\varphi : [-a,a] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monotone Carathéodory-Funktion, die der Wachstumsbedingung

$$|\varphi(x,\eta)| \leqslant A(x) + B\sigma(x)|\eta|^{p/q}\,, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,, \tag{3.18}$$

für ein $A \in L^q(\sigma)$ und ein $B > 0$ genüge. Ferner erfülle φ die Koerzivitätsbedingung

$$\varphi(x,\eta)\eta \geqslant C\varrho(x)|\eta|^p - D(x) \tag{3.19}$$

mit einem $D \in L^1$ und $C > 0$. Nach Folgerung 3.1.3 ist der mit φ assoziierte Nemickii-Operator $\Phi : L^p(\varrho) \to L^q(\sigma)$ dann stetig, beschränkt, monoton und koerziv. Insbesondere folgt aus der (Hemi-)Stetigkeit von Φ auch die maximale Monotonie.

Wir wollen nun im Folgenden die Voraussetzungen an die, den Nemickii-Operator erzeugende, Carathéodory-Funktion weitestgehend abschwächen und benutzen einen Satz von Rockafellar, der besagt, dass Subgradienten unterhalbstetiger, konvexer Funktionale automatisch maximal Monoton sind. Zwar lässt sich nicht jeder maximal monotone Operator als ein solcher Subgradient darstellen ([25] und [13]), dennoch ist es aber unter gewissen Voraussetzungen an die Carathéodory-Funktion möglich eine derartige Darstellung zu finden. Die abstrakte Theorie maximal monotoner Operatoren gibt uns dann an dieser Stelle geeignete Hilfsmittel an die Hand um dann auch Integralgleichungen mit stärkeren Nichtlinearitäten lösen zu können.

Hilfssatz 3.3.1. *Es seien $k : \mathbb{R} \to [-\infty,\infty]$ eine unterhalbstetige konvexe Funktion und $\gamma : L^p \to (-\infty,\infty]$ gemäß*

$$\gamma(u) := \begin{cases} \int_{-a}^{a} k(u(x))\,\mathrm{d}x\,, & \textit{falls } k(u(\cdot)) \in L^1\,, \\ \infty\,, & \textit{sonst} \end{cases}$$

Funktional. Dann ist γ unterhalbstetig und konvex auf L^p und es gilt $f \in \partial\gamma(u)$ genau dann, wenn $f(x) \in \partial k(u(x))$ für fast alle $x \in [-a,a]$.

Beweis. In der Tat ist das Funktional γ konvex, da dies für den Integranden gilt.

Um die Unterhalbstetigkeit einzusehen, zeigen wir, dass aus $u_n \to u$ in L^p und $\gamma(u_n) \leqslant r$ auch $\gamma(u) \leqslant r$ gilt. Wegen $u_n \to u$ in L^p können wir weiter (durch eventuellen Übergang zu einer Teilfolge) o.E.d.A. $u_n(x) \to u(x)$ für fast alle $x \in [-a,a]$ annehmen. Wir nehmen ferner ebenfalls o.E.d.A. an, dass $k(t) \geqslant 0$ gilt. Sollte dies nicht der Fall sein, wählen wir $s \in \mathcal{D}(\partial k)$ und $g \in \partial k(s)$ und gehen über zu $\tilde{k}(t) := k(t) - k(s) - g(t-s) \geqslant 0$ (man beachte noch, dass die Endlichkeit des Maßraumes auch $u_n \to u$ in L^1 impliziert). Es reicht also aus den Fall $r > 0$ zu betrachten. Auf Grund der Unterhalbstetigkeit von k gilt $k(u(x)) \leqslant \liminf k(u_n(x))$ und nun liefert das Lemma von Fatou

$$\gamma(u) = \int_{-a}^{a} k(u(x))\,\mathrm{d}x \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_{-a}^{a} k(u_n(x))\,\mathrm{d}x \leqslant r\,,$$

was gerade die Behauptung zeigt.

Sei nun $f \in \partial\gamma(u) \subset L^q$. Dann gilt

$$\int_{-a}^{a} k(v(x)) - k(u(x))\,\mathrm{d}x \geqslant \int_{-a}^{a} f(x)(v(x) - u(x))\,\mathrm{d}x$$

für alle $v \in L^p$. Mit
$$w(x) := \begin{cases} v(x)\,, & \text{falls } x \in A\,, \\ u(x)\,, & \text{falls } x \in A^c\,, \end{cases}$$
wobei $A \subset [-a,a]$ eine messbare Menge bezeichnet, haben wir dann insbesondere
$$\int_A k(v(x)) - k(u(x)) - f(x)(v(x) - u(x))\,\mathrm{d}x \geqslant 0$$
für alle $v \in L^p$. Da diese Argumentation für alle messbaren Teilmengen A gilt, folgt
$$k(v(x)) - k(u(x)) \geqslant f(x)(v(x) - u(x)) \quad \text{f.ü. in } [-a,a]$$
für alle $v \in L^p$, also $f(x) \in \partial k(u(x))$.

Sei nun umgekehrt die L^q-Funktion $f(x)$ für fast alle $x \in [-a,a]$ ein Element des Subgradienten von k in $u(x)$. Dann gilt per Definition
$$k(y) - k(u(x)) \geqslant f(x)(y - u(x)) \quad \text{f.ü. in } [-a,a]$$
für alle $y \in \mathbb{R}$. Insbesondere also für alle $v \in L^p$
$$k(v(x)) - k(u(x)) \geqslant f(x)(v(x) - u(x)) \quad \text{f.ü. in } [-a,a]\,.$$
Integration über $[-a,a]$ liefert $f \in \partial\gamma(u)$. ■

Es bezeichne nun ferner ψ eine monotone Carathéodory-Funktion auf $[-a,a] \times \mathbb{R}$ mit $\psi(\cdot,0) \in L^q(\sigma)$. Dann ist die Funktion
$$k(x,\eta) := \int_0^\eta \psi(x,w)\,\mathrm{d}w \tag{3.20}$$
auf Grund der Stetigkeit von ψ in der zweiten Variablen fast überall differenzierbar mit der monotonen Ableitung $\psi(x,\eta)$, was die Konvexität von k nach sich zieht. Mit der Differenzierbarkeit von k in η ist nun ferner das Subdifferenzial an der Stelle η einelementig und entspricht der partiellen Ableitung von k für fast alle $x \in [-a,a]$, d.h. $\partial k(x,\eta) = \{\partial_\eta k(x,\eta)\} = \{\psi(x,\eta)\}$.

Betrachten wir auf $L^p(\varrho)$ das Funktional
$$\gamma(u) := \begin{cases} \int_{-a}^a k(x,u(x))\,\mathrm{d}x\,, & \text{falls } k(\cdot,u(\cdot)) \in L^1 \\ \infty\,, & \text{sonst}\,. \end{cases} \tag{3.21}$$
Dann besagt der letzte Hilfssatz gerade, dass γ konvex und unterhalbstetig ist und ferner gilt $f \in \partial\gamma(u)$ genau dann wenn $f(x) = \psi(x,u(x))$ f.ü. in $[-a,a]$.

Damit ist der zugehörige (monotone) Nemickii-Operator $\Psi : L^p(\varrho) \supset \mathcal{D}(\Psi) \to L^q(\sigma)$ mit dem Bereich
$$\mathcal{D}(\Psi) = \{u \in L^p(\varrho) \mid \Psi u \in L^q(\sigma)\} \neq \emptyset\,, \tag{3.22}$$
denn $0 \in \mathcal{D}(\Psi)$, der Subgradient von γ, d.h. $\partial\gamma(u) = \Psi u$. Nach einem Satz von Rockafellar ist Ψ maximal monoton. Es gilt das folgende

Theorem 3.3.2. *Es seinen $p \geqslant 2$, die Voraussetzungen von Folgerung 2.1.4 erfüllt und die Gewichtsfunktionen ϱ und σ seien durch (2.2) beziehungsweise (2.3) gegeben. Ferner seien φ und ψ monotone Carathéodory-Funktionen, die den Bedingungen (3.18), (3.19) und $\psi(\cdot, 0) \in L^q(\sigma)$ genügen sowie $K : L^p(\varrho) \to L^q(\sigma)$ ein linearer, beschränkter, positiver Operator. Dann besitzt die Gleichung*

$$\Psi u + \Phi u + \lambda S u + K u = g\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}\,, \tag{3.23}$$

mit dem singulären Integraloperator S, gemäß (2.4), für jedes $g \in L^q(\sigma)$ eine Lösung $u \in L^p(\varrho)$ mit $\Psi u \in L^q(\sigma)$. Die Lösung ist eindeutig, falls die Funktion $\varphi + \psi$ f.ü. streng monoton in η ist.

Beweis. Zuerst sehen wir, dass der Operator $T = \Phi + \lambda S + K$ beschränkt, stetig und monoton ist. Ferner gilt

$$\frac{\langle Tu, u\rangle}{\|u\|_{L^p(\varrho)}} \geqslant \frac{\langle \Phi u, u\rangle}{\|u\|_{L^p(\varrho)}} \to \infty\,,$$

falls $\|u\|_{L^p(\varrho)} \to \infty$, was die Ψ-Koerzivität von T bedeutet, da $0 \in \mathcal{D}(\Psi)$. Da Ψ maximal monoton ist, besagt der Hauptsatz über maximal monotone Operatoren (Theorem 1.3.10) nun, dass $\mathcal{R}(T + \Psi) = L^q(\sigma)$ gilt.

Es bleibt noch die Eindeutigkeit zu zeigen, falls $\varphi + \psi$ f.ü. streng monoton ist. Seien dazu u, v zwei verschiedene Lösungen von (3.23). Dann folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \langle (\Phi + \Psi + \lambda S + K)u - (\Phi + \Psi + \lambda S + K)v, u - v\rangle \\ &\qquad \geqslant \langle (\Phi + \Psi)u - (\Phi + \Psi)v, u - v\rangle > 0\,, \end{aligned}$$

was einen Widerspruch darstellt, falls $u \neq v$. ■

Das eben bewiesene Theorem zeigt für $g \in L^\infty \hookrightarrow L^q(\sigma)$, dass die Operatorgleichung (3.23) mindestens eine Lösung u im Raum $L^p(\varrho) \hookrightarrow L^1$ existiert.

***Bemerkung* 3.3.3.** Um Theorem 3.3.2 behandeln zu können, sollte auch folgende Überlegung Früchte tragen:

(i) Zuerst dürfen wir o.E.d.A. annehmen, dass $\Psi 0 = 0$ und $T0 = 0$ gelten. Gilt dies nicht, gehen wir über zu $\tilde{\Psi} u := \Psi u - \Psi 0$, $\tilde{T} u := Tu - T0$ und zur Gleichung $\tilde{\Psi} u + \tilde{T} u = \tilde{g}$, wobei $\tilde{g} = g - \Psi 0 - T0$ und $T = \Phi + \lambda S + K$ ist (der Operator $\tilde{\Psi}$ ist dann natürlich monoton mit $0 \in \mathcal{D}(\tilde{\Psi})$ und wird von der monotonen Carathéodory-Funktion $\tilde{\psi}(x, \eta) = \psi(x, \eta) - \psi(x, 0)$ erzeugt). Wir benutzen ein Abschneideargument. Sei dazu

$$\psi_n(x, \eta) := \begin{cases} \psi(x, \eta)\,, & \text{falls } |\psi(x, \eta)| \leqslant n \\ n\dfrac{\psi(x, \eta)}{|\psi(x, \eta)|}\,, & \text{falls } |\psi(x, \eta)| > n\,. \end{cases} \tag{3.24}$$

Dann ist ψ_n eine monotone Carathéorory-Funktion und erfüllt zusätzlich die Wachstumsbedingung

$$|\psi_n(x, \eta)| \leqslant n\,. \tag{3.25}$$

Also ist ψ_n sogar beschränkt. Beachten wir noch, dass die konstante Funktion $A_n(x) \equiv n$ für alle n im Raum $L^q(\sigma)$ liegt, haben wir nach Satz 3.1.2 und Folgerung 3.1.3 einen stetigen, beschränkten und monotonen Nemickii-Operator $\Psi_n : L^p(\varrho) \to L^q(\sigma)$. Mit den gleichen Argumenten wie im obigen Beweis sehen wir, dass T stetig, beschränkt, monoton und zusätzlich sogar koerziv ist. Vermöge der Abschätzung

$$\begin{aligned}\frac{\langle(\Psi_n+T)u,u\rangle}{\|u\|_{L^q(\varrho)}} &= \frac{\langle\Psi_n u,u\rangle}{\|u\|_{L^q(\varrho)}}+\frac{\langle Tu,u\rangle}{\|u\|_{L^q(\varrho)}}\\ &\geqslant \frac{\langle Tu,u\rangle}{\|u\|_{L^q(\varrho)}}\\ &\to \infty\,,\quad \text{falls } \|u\|_{L^q(\varrho)}\to\infty\end{aligned}$$

ist auch die Summe $\Psi_n + T$ koerziv. Man beachte hierbei $\Psi_n 0 = \Psi 0 = 0$. Nach dem Hauptsatz über monotone Operatoren von Minty und Browder (Theorem 1.2.6) besitzt jedes der abgeschnittenen Probleme

$$\Psi_n u_n + T u_n = \Psi_n u_n + \Phi u_n + \lambda S u_n + K u_n = g\,,\quad n\in\mathbb{N}\,, \tag{3.26}$$

mindestens eine Lösung $u_n \in L^p(\varrho)$.

(ii) Wir zeigen nun, dass die Folge der Lösungen beschränkt ist. Diese apriori-Abschätzung bekommt man aus der Koerzivität von T. Multiplizieren wir (3.26) mit u_n und integrieren, so folgt die Abschätzung

$$0 \leqslant \langle Tu_n,u_n\rangle \leqslant \langle g,u_n\rangle \leqslant \|g\|_{L^q(\sigma)}\|u_n\|_{L^p(\varrho)}\,, \tag{3.27}$$

wobei wir von der Monotonie von Ψ_n Gebrauch gemacht haben und im letzten Schritt die Hölder-Ungleichung verwendet wurde. Wäre die Folge der Lösungen u_n unbeschränkt, so gäbe es zu jedem $R > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\|u_n\|_{L^p(\varrho)} \geqslant R$. Da nun T koerziv ist, gibt es zu jedem $C > 0$ ein $R_0 > 0$ mit

$$\frac{\langle Tu_n,u_n\rangle}{\|u_n\|_{L^p(\varrho)}} \geqslant C\,,\quad \text{falls } \|u_n\|_{L^p(\varrho)} \geqslant R_0 > 0\,.$$

Wir wählen $C := 1 + \|g\|_{L^q(\sigma)}$ und sehen auf Grund von (3.27)

$$\|g\|_{L^q(\sigma)} \geqslant \frac{\langle Tu_n,u_n\rangle}{\|u_n\|_{L^p(\varrho)}} \geqslant C = 1+\|g\|_{L^q(\sigma)}\,,$$

falls $\|u_n\|_{L^p(\varrho)} \geqslant R_0$, was einen Widerspruch darstellen würde. Also gilt $\|u_n\| < R_0$. Wir können nun nach dem Satz von Eberlein-Šmulian eine schwach konvergente Teilfolge auswählen. O.E.d.A. sei dies die Folge selbst (sonst gehen wir zur Teilfolge über) und u bezeichne den schwachen Grenzwert.

Weil die Folge der Lösungen beschränkt ist, schließen wir auf Grund der Beschränktheit von T, dass die Folge $(g - Tu_n)$ ebenfalls beschränkt ist und folglich auch eine schwach konvergente Teilfolge hat. Sei dies wieder o.E.d.A. die Folge selbst und der schwache Grenzwert sei mit v bezeichnet. Wegen $\Psi_n u_n = g - Tu_n$ bekommen wir $v_n := \Psi_n u_n \rightharpoonup v \in L^q(\sigma)$.

(iii) Es ist nun zu zeigen, dass $\Psi u \in L^q(\sigma)$ gilt. Dazu definieren wir das Funktional $\gamma_n : L^p(\varrho) \to \mathbb{R}$ gemäß

$$\gamma_n(u) := \int_{-a}^{a} k_n(x, u(x))\,\mathrm{d}x \quad \text{mit} \quad k_n(x,\eta) := \int_0^{\eta} \psi_n(x,w)\,\mathrm{d}w\,, \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{3.28}$$

Mit den gleichen Argumenten wie oben sehen wir, dass der Subgradient $(\partial\gamma_n)(u)$ einelementig ist und durch $\Psi_n u \in L^q(\sigma)$ gegeben ist, d.h. es gilt

$$\gamma_n(w) - \gamma_n(u) \geqslant \langle \Psi_n u, w - u\rangle \qquad \text{für alle } w \in L^p(\varrho)$$

und so folglich

$$\gamma_n(w) - \gamma_n(u_n) - \langle v_n, w\rangle + \langle v_n, u_n\rangle \geqslant 0 \quad \text{für alle } w \in L^p(\varrho)\,. \tag{3.29}$$

Man kann nun zeigen, dass $\gamma_n(u) \to \gamma(u)$ für $u \in L^p(\varrho)$ gilt. Sei zuerst $u \in \mathcal{D}(\gamma)$, d.h. $\gamma(u) < \infty$. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die Funktionen

$$w_n^-(x) := \inf\{w \in \mathbb{R} \mid \psi(x,w) > -n\} \tag{3.30}$$

und

$$w_n^+(x) := \sup\{w \in \mathbb{R} \mid \psi(x,w) < n\}\ . \tag{3.31}$$

Dann gelten $w_n^-(x) < 0$ und $w_n^+(x) > 0$ und sind fallende beziehungsweise wachsende Folgen für fast alle $x \in [-a,a]$ (man beachte die Monotonie von $\psi(x,w)$ und $\psi(x,0) = 0$). Im Folgenden schreiben wir kurz ψ und ψ_n für $\psi(x,w)$ beziehungsweise $\psi_n(x,w)$. Damit erhält man (o.E.d.A. gelte $w_n^\pm(x) \to \pm\infty$ für f.a. $x \in [-a,a]$)

$$\begin{aligned}
|\gamma(u) - \gamma_n(u)| &= \left|\int_{-a}^{a}\int_0^{u(x)} \psi - \psi_n \,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}x\right| \\
&= \left|\int_{0<u}\int_0^{u(x)} \psi - \psi_n \,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}x - \int_{u<0}\int_{u(x)}^{0} \psi - \psi_n \,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}x\right| \\
&= \left|\int_{0<u}\left\{\int_0^{w_n^+(x)} \psi - \psi_n \,\mathrm{d}w + \int_{w_n^+(x)}^{u(x)} \psi - \psi_n \,\mathrm{d}w\right\}\mathrm{d}x\right. \\
&\quad \left. - \int_{u<0}\left\{\int_{u(x)}^{w_n^-(x)} \psi - \psi_n \,\mathrm{d}w + \int_{w_n^-(x)}^{0} \psi - \psi_n \,\mathrm{d}w\right\}\mathrm{d}x\right| \\
&= \left|\int_{0<u}\int_{w_n^+(x)}^{u(x)} \psi - \psi_n \,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}x - \int_{u<0}\int_{u(x)}^{w_n^-(x)} \psi - \psi_n \,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}x\right| \\
&= \left|\int_{w_n^+<u}\int_{w_n^+(x)}^{u(x)} \psi - \psi_n \,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}x - \int_{u<w_n^-}\int_{u(x)}^{w_n^-(x)} \psi - \psi_n \,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}x\right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \int_{w_n^+<u} \int_{w_n^+(x)}^{u(x)} \psi - n \,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}x - \int_{u<w_n^-} \int_{u(x)}^{w_n^-(x)} \psi + n \,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}x \right| \\
&\leqslant \left| \int_{w_n^+<u} \int_{w_n^+(x)}^{u(x)} \psi \,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}x \right| + \left| \int_{u<w_n^-} \int_{u(x)}^{w_n^-(x)} -\psi \,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}x \right| \\
&\quad + \left| \int_{w_n^+<u} \int_{w_n^+(x)}^{u(x)} n \,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}x \right| + \left| \int_{u<w_n^-} \int_{u(x)}^{w_n^-(x)} n \,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}x \right| \\
&\leqslant \left| \int_{w_n^+<u} \int_{0}^{u(x)} \psi \,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}x \right| + \left| \int_{u<w_n^-} \int_{u(x)}^{0} -\psi \,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}x \right| \\
&\quad + \left| \int_{w_n^+<u} \int_{0}^{u(x)} \psi \,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}x \right| + \left| \int_{u<w_n^-} \int_{u(x)}^{0} -\psi \,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}x \right| \\
&\to 0
\end{aligned}$$

für $n \to \infty$, denn die Menge $\{|u| = \infty\}$ ist eine Nullmenge. Sei nun $\gamma(u) = +\infty$, also $k(\cdot, u(\cdot)) \notin L^1$, wobei k durch (3.20) gegeben ist. Für die Folge der L^1-Normen gilt

$$\begin{aligned}
\|k_n(\cdot, u(\cdot))\|_{L^1} &= \int_{-a}^{a} \int_{0}^{u(x)} \psi_n \,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{0<u} \int_{0}^{u(x)} \psi_n \,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}x + \int_{u<0} \int_{u(x)}^{0} -\psi_n \,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{0<u<w_n^+} \int_{0}^{u(x)} \psi \,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}x + \int_{w_n^+<u} \int_{0}^{u(x)} n \,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}x \\
&\quad + \int_{u<w_n^-} \int_{u(x)}^{0} n \,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}x + \int_{w_n^-<u<0} \int_{u(x)}^{0} -\psi \,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}x \\
&\geqslant \int_{w_n^-<u<w_n^+} \int_{0}^{u(x)} \psi \,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}x \\
&\to \|k(\cdot, u(\cdot))\|_{L^1} = \infty\,,
\end{aligned}$$

und dies bedeutet insgesamt $\gamma_n(u) \to \gamma(u)$ für alle $u \in L^p(\varrho)$.

Weiter ist es jedoch **nicht** gelungen

$$\gamma(u) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \gamma_n(u_n) \quad \text{und} \quad \langle v_n, u_n \rangle \to \langle v, u \rangle$$

nachzuweisen (man beachte $u_n \rightharpoonup u$, $v_n \rightharpoonup v$ und $0 \leqslant \langle v_n, u_n \rangle \leqslant \langle g, u_n \rangle$). Wäre dies richtig, so bekämen wir die Ungleichung

$$\gamma(w) - \gamma(u) \geqslant \langle v, w - u \rangle \qquad \text{für alle } w \in L^p(\varrho)$$

und dies würde, da der Subgradient von γ an der Stelle u einelementig und durch Ψu gegeben ist, gerade $\Psi u = v \in L^q(\sigma)$ bedeuten. Weiter wäre man dann in der Situation $u_n \rightharpoonup u$, $Tu_n \rightharpoonup g - \Psi u$ und $\langle Tu_n, u_n \rangle \to \langle g - \Psi u, u \rangle$, was nach dem Minty-Trick (Hilfssatz 1.2.5) gerade $Tu = g - \Psi u$ bedeuten würde.

Unter Verwendung der Inversionsformeln (Theorem 2.2.16) des Operators S ist es nun mittels Theorem 3.3.2 möglich auch einen Existenzbeweis für Hammerstein-Gleichungen mit stärker nichtlinearen Termen, als den in Theorem 3.2.7 zugelassenen (man beachte die Wachstumsbedingung für f), zu beweisen. Genauer gilt das

Theorem 3.3.4. *Es seinen die Voraussetzungen von Theorem 3.3.2 erfüllt, K sei der Nulloperator und $\chi := \Phi + \Psi$. Dann besitzt jede der Gleichungen*

$$\lambda u + S_k \chi u = h\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}\,, \quad k = 0, 1, 2\,, \tag{3.32}$$

mit dem singulären Integral S_k, gegeben durch (2.12), für jedes $h \in L^p(\varrho)$ eine Lösung $u \in L^p(\varrho)$ mit $\chi u \in L^p(\varrho)$. Ferner gilt dies auch für die Gleichung

$$\lambda u + S_3 \chi u = h + c r_0\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}\,, \tag{3.33}$$

mit einer von λ und h abhängigen Konstanten $c \in \mathbb{R}$.

Beweis. Für $h \in L^p(\varrho)$ haben wir $g := Sh \in L^p(\varrho)$ und auf Grund der Inversionsformeln von Theorem 2.2.16 auch $S_k g = S_k S h = h$, $k = 0, 1, 2$, sowie auch

$$S_3 g = S_3 S h = h - c_1 r_0 \quad \text{mit} \quad c_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^{a} h(\xi)\, \mathrm{d}\xi\,.$$

Wegen der Einbettung $L^p(\varrho) \subset L^q(\sigma)$ besitzt die Gleichung

$$\chi u + \lambda S u = g \tag{3.34}$$

eine Lösung $u \in L^p(\varrho)$ mit $\chi u \in L^p(\varrho)$ nach Theorem 3.3.2. Die Anwendung des Operators S_k, $k = 0, 1, 2$, auf diese Gleichung (man benutze Theorem 2.2.16(i)-(iii)) ergibt das gewünschte Resultat.

Es bleibt noch der Fall $k = 3$ zu diskutieren. Wenden wir S_3 auf Gleichung (3.34) an, so erhalten wir

$$S_3 \chi u + \lambda(u - c_2 r_0) = h - c_1 r_0 \quad \text{mit} \quad c_2 = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^{a} u(\xi)\, \mathrm{d}\xi\,.$$

Wir können $c = \lambda c_2 - c_1$ wählen und alles ist gezeigt. ■

Wie im vorigen Abschnitt lassen sich nun auch analoge Existenzaussagen für Gleichungen belegen, die die Hilbertschen Integraloperatoren mit Hilbert- beziehungsweise Cauchy-Kern enthalten.

Satz 3.3.5. *Seien $\varphi, \psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotone Carathéodory-Funktionen, die die Bedingungen*

$$|\varphi(x, \eta)| \leqslant A(x) + B|\eta| \tag{3.35}$$

für ein $A \in L^2(\mathbb{R})$ und ein $B > 0$,

$$\eta \varphi(x, \eta) \geqslant C|\eta|^2 - D(x) \tag{3.36}$$

mit einem $D \in L^1(\mathbb{R})$ und einem $C > 0$, sowie $\psi(\cdot, 0) \in L^2(\mathbb{R})$ erfüllen. Ferner sei K ein linearer, positiver und beschränkter Operator im $L^2(\mathbb{R})$ und H bezeichne die durch (2.15) gegebene Hilberttransformation. Dann besitzt die Gleichung

$$\Psi u + \Phi u + \lambda H u + K u = g\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}\,, \tag{3.37}$$

für jedes $g \in L^2(\mathbb{R})$ eine Lösung $u \in L^2(\mathbb{R})$ mit $\Psi u \in L^2(\mathbb{R})$. Die Lösung ist eindeutig, falls $\varphi + \psi$ strikt monoton ist.

Satz 3.3.6. *Seien $p \geqslant 2$ und $\varphi, \psi : [-\pi, \pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotone Carathéodory-Funktionen, die die Bedingungen*

$$|\varphi(x, \eta)| \leqslant A(x) + B|\eta|^{p/q} \tag{3.38}$$

für ein $A \in L^q([-\pi, \pi])$ und ein $B > 0$,

$$\eta\varphi(x, \eta) \geqslant C|\eta|^p - D(x) \tag{3.39}$$

mit einem $D \in L^1([-\pi, \pi])$ und einem $C > 0$, sowie $\psi(\cdot, 0) \in L^q([-\pi, \pi])$ erfüllen. Ferner sei K ein linearer, positiver und beschränkter Operator von $L^p([-\pi, \pi])$ in den $L^q([-\pi, \pi])$ und $\mathcal{H}$ bezeichne das durch (2.19) gegebene singuläre Integral. Dann besitzt die Gleichung

$$\Psi u + \Phi u + \lambda \mathcal{H} u + K u = g\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}\,, \tag{3.40}$$

für jedes $g \in L^q([-\pi, \pi])$ eine Lösung $u \in L^p([-\pi, \pi])$ mit $\Psi u \in L^q([-\pi, \pi])$. Die Lösung ist eindeutig, falls $\varphi + \psi$ strikt monoton ist.

Satz 3.3.7. *Es seinen die Voraussetzungen von Satz 3.3.5 erfüllt, K sei der Nulloperator und $\chi := \Phi + \Psi$. Dann besitzt die Gleichung*

$$\lambda u + H\chi u = h\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}\,, \tag{3.41}$$

mit der Hilberttransformation H, gegeben durch (2.15), für jedes $h \in L^2(\mathbb{R})$ eine Lösung $u \in L^2(\mathbb{R})$ mit $\chi u \in L^2(\mathbb{R})$. Die Lösung ist eindeutig bestimmt, falls χ strikt monoton ist.

Beweis. Es ist nur die Eindeutigkeitsaussage zu zeigen. Diese ist gewissermaßen eine Konsequenz der Tatsache, dass H eine Bijektion ist (Theorem 2.3.1). Seien $u, v \in L^2(\mathbb{R})$ verschiedene Lösungen von (3.42). Dann gilt $\lambda(u - v) + H(\chi u - \chi v) = 0$ und mit $H^2 = \mathbb{1}$ folgt $0 = \lambda H(u - v) + \chi u - \chi v$. Wegen Theorem 2.3.1 und der strikten Monotonie von χ erhalten wir

$$0 = \langle \lambda H(u - v), u - v\rangle + \langle \chi u - \chi v, u - v\rangle = \langle \chi u - \chi v, u - v\rangle > 0\,,$$

was für $u \neq v$ einen Widerspruch darstellen würde. ∎

Satz 3.3.8. *Es seinen die Voraussetzungen von Satz 3.3.6 erfüllt, K sei der Nulloperator und $\chi := \Phi + \Psi$. Dann besitzt die Gleichung*

$$\lambda u - \mathcal{H}\chi u = h + c\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}\,, \tag{3.42}$$

mit dem durch (2.19) gegebenen singulären Integraloperator $\mathcal{H}$, für jedes $h \in L^p([-\pi, \pi])$ eine Lösung $u \in L^p([-\pi, \pi])$ mit $\chi u \in L^p([-\pi, \pi])$ und einer gewissen Konstanten $c \in \mathbb{R}$.

Beweis. Wir benutzen hier die in Folgerung 2.4.3 angegebene Inversionsformel und gehen wie im Beweis von Theorem 3.3.4 vor. Wir definieren $g := \mathcal{H}h$ und wissen, dass die Gleichung

$$\chi u + \lambda \mathcal{H} u = g$$

eine Lösung in $L^p([-\pi, \pi])$ hat. Wenden wir $\mathcal{H}$ auf die Gleichung an, folgt aus der Inversionsformel für $\mathcal{H}$ die Identität

$$\lambda u - \mathcal{H}\chi u = h + \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(\xi)\,\mathrm{d}\xi - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,.$$

Wir können

$$c := \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(\xi)\,\mathrm{d}\xi - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

wählen und alles ist gezeigt. Man beachte hierbei immer die Einbettung $L^p([-\pi, \pi]) \subset L^q([-\pi, \pi])$. ■

4 Nichtlineare Integro-Differenzialgleichungen

4.1 Integro-Differenzialgleichungen mit isolierter Ableitung

Theorem 4.1.1. *Es seien $p \geqslant 2$ und die Gewichtsfunktionen ϱ und σ durch (2.2) beziehungsweise (2.3) gegeben, wobei zusätzlich die Voraussetzungen von Folgerung 2.1.4 erfüllt sein mögen. Weiter seien $\varphi, \psi : [-a, a] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei monotone Carathéodory-Funktionen, die folgenden Bedingungen genügen mögen:*

$$|\varphi(x, \eta)| \leqslant A(x) + B\sigma(x)|u|^{p/q}\,, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \tag{4.1}$$

mit einem $A \in L^q(\sigma)$ und $B > 0$,

$$\varphi(x, \eta)\eta \geqslant C\varrho(x)|u|^p - D(x) \tag{4.2}$$

mit $D \in L^1$ und $C > 0$ sowie

$$\psi(\cdot, \eta) \in L^q(\sigma) \quad \text{für jedes } \eta \in \mathbb{R}\,. \tag{4.3}$$

Ferner seien $\gamma : [-a, a] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte, messbare Funktion und $\delta \in AC([-a, a])$ eine nirgendwo verschwindende Funktion mit $\delta(a) = \delta(-a)$. Es mögen zusätzlich die Ungleichungen

$$2\gamma(x) \geqslant \delta'(x)\,, \quad \text{f.ü. in } [-a, a] \tag{4.4}$$

und

$$\int_{-a}^{a} \frac{\gamma(x)}{\delta(x)}\,\mathrm{d}x \neq 0 \tag{4.5}$$

gelten. Dann besitzt die Operatorgleichung

$$\Phi u + \Psi u + \lambda S u + K u + L u = g\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}\,, \tag{4.6}$$

mit dem Differenzialoperator

$$(Lu)(x) := \delta(x)u'(x) + \gamma(x)u(x)\,, \tag{4.7}$$

dem linearen, beschränkten, positiven Operator $K : L^p(\varrho) \to L^q(\sigma)$ und dem mit φ assoziierten Nemickii-Operator Φ für jede der Randbedingungen $u(-a) = \pm u(a)$ und jedes $g \in L^q(\sigma)$ eine Lösung $u \in L^p(\varrho)$ mit $u', \Psi u \in L^q(\sigma)$.

Beweis. Wir beweisen diese Aussage analog zu der in Theorem 3.3.2. Wir sehen wieder, dass der Operator $\Psi + \lambda S + K$ monoton, stetig, beschränkt und koerziv ist. Zusätzlich müssen wir zeigen, dass der Operator $L : \mathcal{D}(L) \subset L^p(\varrho) \to L^q(\sigma)$ mit dem Bereich

$$\mathcal{D}(L) = \{u \in L^p(\varrho) \mid u \in AC([-a,a]) \, , \; u(-a) = \pm u(a) \, , \; u' \in L^q(\sigma)\}$$

monoton ist und dass die Summe der Operatoren $T = L + \Psi$ maximal monoton ist. Mittels partieller Integration bekommen wir

$$\begin{aligned} \langle Lu, u\rangle = \int_{-a}^{a} \delta u'u + \gamma u^2 \,\mathrm{d}x &= \int_{-a}^{a} \frac{1}{2}(u^2)'\delta \,\mathrm{d}x + \int_{-a}^{a} \gamma u^2 \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}u^2\delta\Big|_{-a}^{a} - \int_{-a}^{a} \frac{1}{2}u^2\delta' \,\mathrm{d}x + \int_{-a}^{a} \gamma u^2 \,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-a}^{a} \left(\gamma - \frac{\delta'}{2}\right) u^2 \,\mathrm{d}x \geqslant 0 \end{aligned} \tag{4.8}$$

auf Grund der Randbedingungen für δ und u und wegen (4.4). Da L linear ist, folgt die Monotonie aus der Positivität. Nach Hilfssatz 1.3.4 (iii) ist die maximale Monotonie von $T : \mathcal{D}(T) \subset L^p(\varrho) \to L^q(\sigma)$, mit dem Bereich

$$\mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(L) \cap \mathcal{D}(\Psi) = \mathcal{D}(L) \, ,$$

gesichert, wenn T^{-1}, mit $\mathcal{D}(T^{-1}) = L^q(\sigma)$ einwertig und hemistetig ist. Man beachte, dass die Identität für den Bereich von T wegen (4.3) und der absoluten Stetigkeit von $u \in \mathcal{D}(L)$ richtig ist: Da u absolut stetig ist, nimmt u Minimum (bezeichnet mit C_-) und Maximum (C_+) auf $[-a, a]$ an. Wegen der Monotonie von ψ gilt dann

$$0 \leqslant \psi(x, u(x)) - \psi(x, C_-) \leqslant \psi(x, C_+) - \psi(x, C_-) \quad \text{f.ü. in } [-a, a]$$

und so folgt mit (4.3) gerade

$$\|\Psi u - \Psi C_-\|_{L^q(\sigma)} \leqslant \|\Psi C_+\|_{L^q(\sigma)} + \|\Psi C_-\|_{L^q(\sigma)} < \infty \, ,$$

was $\Psi u - \Psi C_- \in L^q(\sigma)$ bedeutet, also folglich $\Psi u \in L^q(\sigma)$ und so auch $\mathcal{D}(L) \subset \mathcal{D}(\Psi)$.

Um die Einwertigkeit und die Hemistetigkeit von T^{-1} nachzuweisen, betrachten wir die Operatorgleichung

$$Tu = f \, , \quad f \in L^q(\sigma) \, , \tag{4.9}$$

d.h. die quasilineare Differenzialgleichung

$$\delta(x)u'(x) + \gamma(x)u(x) + \psi(x, u(x)) = f(x) \quad \text{in } (-a, a) \tag{4.10}$$

mit den Randbedingungen $u(-a) = \pm u(a)$ und die Integralgleichung

$$u(x) = F(x) - \int_{-a}^{a} K(x, \xi)\psi(\xi, u(\xi)) \,\mathrm{d}x \tag{4.11}$$

mit dem Kern

$$K(x,\xi) := \begin{cases} \dfrac{1}{1 \mp H(a)} \cdot \dfrac{H(x)}{H(\xi)\delta(\xi)} , & \text{falls } \xi < x , \\ \dfrac{\pm H(a)}{1 \mp H(a)} \cdot \dfrac{H(x)}{H(\xi)\delta(\xi)} , & \text{falls } \xi > x , \end{cases}$$

der Funktion

$$H(x) := \exp\left(- \int_{-a}^{x} \frac{\gamma(\xi)}{\delta(\xi)} \,\mathrm{d}\xi \right)$$

und

$$F(x) := (Mf)(x) := \int_{-a}^{a} K(x,\xi) f(\xi) \,\mathrm{d}\xi . \tag{4.12}$$

Offenbar erfüllt die Funktion H die Differenzialgleichungen

$$\left(\frac{1}{H}\right)' = \frac{\gamma}{\delta H} \quad \text{und} \quad H' = -\frac{\gamma}{\delta} H . \tag{4.13}$$

Ferner ist die Kernfunktion K in $(-a,a) \times (-a,a)$ stückweise stetig und beschränkt sowie für jedes $\xi \in (-a,a)$ in $x \in (-a,a) \setminus \{\xi\}$ partiell differenzierbar mit der Ableitung

$$\partial_x K(x,\xi) = -\frac{\gamma(x)}{\delta(x)} K(x,\xi) .$$

Wir zeigen, dass (4.10) und (4.11) äquivalent sind.

Sei also u Lösung von (4.11), d.h.

$$u(x) = \frac{H(x)}{1 \mp H(a)} \left(\int_{-a}^{x} \frac{f(\xi) - \psi(\xi, u(\xi))}{H(\xi)\delta(\xi)} \,\mathrm{d}\xi \pm H(a) \int_{x}^{a} \frac{f(\xi) - \psi(\xi, u(\xi))}{H(\xi)\delta(\xi)} \,\mathrm{d}\xi \right)$$

Damit haben wir unter Verwendung von (4.13)

$$\begin{aligned} u'(x) &= -\frac{\gamma(x)}{\delta(x)} \frac{H(x)}{1 \mp H(a)} \left(\int_{-a}^{x} \frac{f(\xi) - \psi(\xi, u(\xi))}{H(\xi)\delta(\xi)} \,\mathrm{d}\xi \pm H(a) \int_{x}^{a} \frac{f(\xi) - \psi(\xi, u(\xi))}{H(\xi)\delta(\xi)} \,\mathrm{d}\xi \right) \\ &\quad + \frac{H(x)}{1 \mp H(a)} \left(\frac{f(x) - \psi(x, u(x))}{H(x)\delta(x)} \mp H(a) \frac{f(x) - \psi(x, u(x))}{H(x)\delta(x)} \right) \\ &= -\frac{\gamma(x)}{\delta(x)} u(x) + \frac{f(x) - \psi(x, u(x))}{\delta(x)} . \end{aligned}$$

Eine kleine Umstellung zeigt nun

$$\delta(x) u'(x) + \gamma(x) u(x) + \psi(x, u(x)) = f(x) ,$$

d.h. u erfüllt die Differenzialgleichung. Ferner erfüllt u auch die Randbedingungen (man beachte die Kernfunktion und $H(-a) = 1$).

Sei u nun Lösung des Randwertproblems (4.10). Multiplikation mit $K(x,\xi)$ und Integration liefert

$$\int_{-a}^{a} K(x,\xi)(\delta(\xi)u'(\xi)+\gamma(\xi)u(\xi))\,\mathrm{d}\xi = F(x) - \int_{-a}^{a} K(x,\xi)\psi(\xi,u(\xi))\,\mathrm{d}\xi\,.$$

Unter Benutzung von (4.13) und der Randbedingungen für u liefert die linke Seite gerade

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^{a} K(x,\xi)(\delta(\xi)u'(\xi)+\gamma(\xi)u(\xi))\,\mathrm{d}\xi &= \frac{H(x)}{1\mp H(a)}\int_{-a}^{x}\frac{1}{H(\xi)}u'(\xi)+\left(\frac{1}{H(\xi)}\right)' u(\xi)\,\mathrm{d}\xi \\
&\quad \pm\frac{H(a)H(x)}{1\mp H(a)}\int_{x}^{a}\frac{1}{H(\xi)}u'(\xi)+\left(\frac{1}{H(\xi)}\right)' u(\xi)\,\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{H(x)}{1\mp H(a)}\left(\frac{u}{H}\Big|_{-a}^{x} \pm \frac{u}{H}\Big|_{x}^{a}\right) \\
&= \frac{H(x)}{1\mp H(a)}\left(\frac{u(x)}{H(x)} \mp H(a)\frac{u(x)}{H(x)} \pm u(a) - u(-a)\right) \\
&= u(x)\,.
\end{aligned}$$

Damit sind (4.10) und (4.11) äquivaltent.

Nun ist der Operator M, definiert durch (4.12), linearer beschränkter Operator vom Raum L^1 in den L^∞:

$$\|Mf\|_{L^\infty} \leqslant \operatorname*{ess\text{-}sup}_{(x,\xi)\in[-a,a]\times[-a,a]} |K(x,\xi)|\,\|f\|_{L^1}\,, \quad f\in L^1\,.$$

Aus der Äquivalenz der beiden Gleichungen und der Positivität von L folgt (vermöge der Substitution $u=Mf$)

$$\langle f, Mf\rangle = \langle \delta u' + \gamma u, u\rangle \geqslant 0\,, \quad f\in L^1\,,$$

also auch die Monotonie von M. Brézis und Browder in [1] folgend (Theoreme 1 ind 2), besitzt die Hammersteingleichung (4.11) auf Grund der Voraussetzungen an ψ für jedes $f\in L^q(\sigma)\subset L^1$ nun genau eine Lösung $u\in L^\infty\subset L^p(\varrho)$ und die Lösung hängt stetig von f ab. Weiter folgt aus (4.11), dass $u\in\mathcal{D}(L)$ (man beachte dazu noch $\Psi u\in L^q(\sigma)$ wegen (4.3)).

Insgesamt haben wir also die Hemistetigkeit und Einwertigkeit von T^{-1} mit $\mathcal{D}(T^{-1}) = L^q(\sigma)$, woraus nach Hilfssatz 1.3.4 die maximale Monotonie von T^{-1} folgt. Die Existenz einer Lösung von (4.6) folgt nun wieder aus dem Hauptsatz über maximal monotone Operatoren. ■

***Bemerkung* 4.1.2.** (i) Ist die Funktion $\varphi+\psi$ streng monoton, so ist die Lösung von (4.6) eindeutig bestimmt. Alternativ erhält man die Eindeutigkeit der Lösung, wenn man die Forderung (4.4) durch

$$2\gamma(x) - \delta'(x) \geqslant \varepsilon \quad \text{f.ü. für ein } \varepsilon > 0$$

ersetzt. Dann zeigt (4.8) nämlich, dass der Operator L strikt monoton ist.

(ii) Die im Beweis des obigen Satzes definierte Kernfunktion $K(x,\xi)$ ist nichts anderes als eine Green-Funktion des Randwertproblems (4.10). Die Funktion $H(x)$ entspricht einer Lösung des homogenen Problems $\delta u' + \gamma u = 0$.

(iii) Im Fall der Randbedingung $u(-a) = -u(a)$ ist die Bedingung (4.5) nicht notwendig. Ist diese nämlich verletzt, so folgt für die Kernfunktion K im Beweis des Theorems gerade immer noch $K(-a,\xi) = -K(a,\xi)$ (beachte $1 + H(a) = 2$), was wiederum bedeutet, dass u die obige Randbedingung erfüllt, wenn u Lösung der Hammersteingleichung (4.11) ist.

Auf analoge Art und Weise, wie wir es in Theorem 3.3.4 getan haben, können wir nun die folgende Aussage beweisen:

Theorem 4.1.3. *Es seinen die Voraussetzungen von Theorem 4.1.1 erfüllt, K sei der Nulloperator. Dann besitzt jede der Gleichungen*

$$\lambda u + S_k(Lu + \Phi u + \Psi u) = h\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}\,,\,, \quad k = 0,1,2\,, \tag{4.14}$$

mit dem singulären Integral S_k, gegeben durch (2.12), für jedes $h \in L^p(\varrho)$ eine Lösung $u \in L^p(\varrho)$ mit $u', \Psi u \in L^q(\sigma)$ und $u(-a) = u \pm (a)$. Ferner gilt dies auch für die Gleichung

$$\lambda u + S_3(Lu + \Phi u + \Psi u) = h + Cr_0\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}\,, \tag{4.15}$$

mit einer gewissen Konstanten $C \in \mathbb{R}$.

Beweis. Wir definieren, wie im Beweis von Theorem 3.3.4 $g := Sh \in L^p(\varrho) \subset L^q(\sigma)$. Dann hat die Gleichung

$$\lambda Su + Lu + \Psi u = g \tag{4.16}$$

eine Lösung $u \in L^p(\varrho)$ mit $u', \Psi u \in L^q(\sigma)$ und $u(-a) = \pm u(a)$. Unter Benutzung der Inversionsformeln für das singuläre Integral folgt die Behauptung und im Fall $k = 3$ kann die Konstante als $C = \lambda c_2 - c_1$ mit

$$c_1 := \frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a} h(\xi)\,\mathrm{d}\xi \quad \text{und} \quad c_2 := \frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a} u(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

gewählt werden. ■

4.2 Nichtlineare Gleichungen mit dem Prandtlschen Integro-Differenzialoperator

Wir wenden uns nun dem Prandtlschen Integro-Differenzialoperator

$$(Tu)(x) := -\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a} \frac{u'(y)}{y-x}\,\mathrm{d}y\,, \quad x \in [-a,a]\,, \tag{4.17}$$

auf Bereichen mit der Randbedingung $u(a) = u(-a) = 0$ zu.

Hilfssatz 4.2.1. *Sei $p > 1$, und die Gewichstsfunktionen ϱ und σ seien gegeben durch (2.2) beziehungsweise (2.3). Dann ist der Operator T gegeben durch (4.17) selbstdual, d.h. es gilt $\langle Tu, v\rangle = \langle u, Tv\rangle$ auf jedem Bereich*

$$\mathcal{D}^p_\varrho(T) := \{u \in L^p(\varrho) \mid u \in AC([-a,a]) \, , \; u(a) = u(-a) = 0 \, , \; u' \in L^q(\sigma)\} \; , \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \, .$$

Beweis. Seien $u \in \mathcal{D}^p_\varrho(T)$ und $v \in \mathcal{C}^\infty_0([-a,a])$. Weiter sei für geeignetes $\varepsilon > 0$

$$(S_\varepsilon v)(x) := \int_{-a}^{x-\varepsilon} \frac{v(y)}{y-x} \, \mathrm{d}y + \int_{x+\varepsilon}^{a} \frac{v(y)}{y-x} \, \mathrm{d}y \, .$$

Dann ist $S_\varepsilon v \in \mathcal{C}^1([-a,a])$ für alle $\varepsilon > 0$ und für $\varepsilon \to 0$ erhalten wir gerade für jedes $x \in [-a,a]$ den Cauchyschen Hauptwert $(\pi S v)(x)$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(S_\varepsilon v)(x) &= -\frac{v(x-\varepsilon)}{\varepsilon} + \int_{-a}^{x-\varepsilon} \frac{v(y)}{(y-x)^2} \, \mathrm{d}y \\
&\quad -\frac{v(x+\varepsilon)}{\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^{a} \frac{v(y)}{(y-x)^2} \, \mathrm{d}y \\
&= -\frac{v(x-\varepsilon)}{\varepsilon} + \frac{v(x-\varepsilon)}{\varepsilon} + \int_{-a}^{x-\varepsilon} \frac{v'(y)}{y-x} \, \mathrm{d}y \\
&\quad -\frac{v(x+\varepsilon)}{\varepsilon} + \frac{v(x+\varepsilon)}{\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^{a} \frac{v'(y)}{y-x} \, \mathrm{d}y \\
&= \int_{-a}^{x-\varepsilon} \frac{v'(y)}{y-x} \, \mathrm{d}y + \int_{x+\varepsilon}^{a} \frac{v'(y)}{y-x} \, \mathrm{d}y =: (T_\varepsilon v)(x) \, .
\end{aligned}$$

Der Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ liefert gerade den Cauchyschen Hauptwert des Intgrals der rechten Seite und es gilt

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (T_\varepsilon v)(x) = -\pi (Tv)(x) \, .$$

Nun ist dieser Grenzwert für $v \in \mathcal{C}^\infty_0([-a,a])$ gleichmäßig, da v' insbesondere Lipschitz-stetig ist (d.h. $|v'(x) - v'(y)| \leqslant L|y-x|$ für alle $x, y \in [-a,a]$):

$$\begin{aligned}
|-\pi(Tv)(x) - (T_\varepsilon v)(x)| &= \left| \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{v'(y) - v'(x)}{y-x} \, \mathrm{d}y + v'(x) \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{1}{y-x} \, \mathrm{d}y \right| \\
&\leqslant \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{|v'(y) - v'(x)|}{|y-x|} \, \mathrm{d}y \\
&\leqslant 2L\varepsilon \, .
\end{aligned}$$

Alle Integrale sind als Cauchyscher Hauptwert zu verstehen. Man beachte hierbei noch, dass das rechte Integral in der ersten Zeile dieser Abschätzung für $x \in (-a,a)$ den Wert Null hat und dass v' bereits in einer kleinen Umgebung von $\pm a$ verschwindet. Mithin gilt also

$$v'(x) \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{1}{y-x} \, \mathrm{d}y = 0 \quad \text{für alle } x \in [-a,a] \, .$$

Damit können wir nun die Ableitung und den Grenzwert für $\varepsilon \to 0$ vertauschen und erhalten

$$\pi(Sv)'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \lim_{\varepsilon\to 0}(S_\varepsilon v)(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(S_\varepsilon v)(x) = -\pi(Tv)(x)\,.$$

Damit haben wir nun

$$\langle Tu, v\rangle = -\langle Su', v\rangle = \langle u', Sv\rangle \overset{(*)}{=} -\langle u, (Sv)'\rangle = \langle u, Tv\rangle$$

für $u \in \mathcal{D}^p_\varrho(T)$ und $v \in \mathcal{C}_0^\infty([-a,a])$, wobei die Gleichheit $(*)$ aus partieller Integration folgt. Da $\mathcal{C}_0^\infty([-a,a])$ dicht in $L^p(\varrho)$ liegt, folgt die Behauptung nun durch Fortsetzung von T auf $\mathcal{D}^p_\varrho(T)$. Der Operator T ist also auch auf dem Raum $\mathcal{D}^p(T)$ selbstdual. ■

Das folgende Theorem geht auf M. Schleiff ([16]) zurück und zeigt einige nützliche Eigenschaften von T in einigen Räumen auf.

Theorem 4.2.2. *Es gilt die Ungleichung*

$$\langle Tu, u\rangle \geqslant \int_{-a}^{a} |u(x)|^2 r_0(x)\,\mathrm{d}x \tag{4.18}$$

für jede absolut stetige Funktion $u \in L^2(r_3)$ mit $u(a) = u(-a) = 0$ und $u' \in L^2(r_3)$.

Um dieses Theorem zu beweisen, erweist es sich als günstig den Raum $L^2(r_3)$ mit einer etwas modifizierten Dualitätspaarung zu versehen. Wir führen diese ein als

$$(f,g)_{L^2(r_3)} := \int_{-a}^{a} f(x)g(x)r_3(x)\,\mathrm{d}x\,, \quad g \in L^2(r_3)\,.$$

Wenden wir im Fall $f \in L^2(r_3)$ die Hölder-Ungleichung an, so erhalten wir

$$\left|(f,g)_{L^2(r_3)}\right| = \left|\int_{-a}^{a} f(x)(r_3(x))^{1/2}(r_3(x))^{1/2}g(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \|f\|_{L^2(r_3)}\,\|g\|_{L^2(r_3)}\,,$$

was zeigt, dass jede $L^2(r_3)$-Funktion ein stetiges lineares Funktional auf diesem Raum erzeugt. Dies ist aber (nach dem Satz von Riesz) bereits die Menge aller stetigen Funktionale auf $L^2(r_3)$ und so können wir den $L^2(r_3)$ als Hilbertraum mit dem Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)_{L^2(r_3)}$ auffassen. Die Norm einer Funktion erhalten wir natürlich wieder aus der Wurzel des Skalarproduktes der Funktion mit sich selbst. Dies vereinfacht den nachfolgenden Beweis, da man nun in der Lage ist, sich aus einer (wohlbekannten) Orthogonalbasis des ungewichteten Raumes L^2 ohne große Mühe ein vollständiges Orthogonalensystem des gewichteten Raumes zu konstruieren.

Beweis des Theorems. Der Beweis fußt auf einer geeigneten Orthogonalreihenentwicklung im (Hilbertraum) $L^2(r_3)$. Das System der Funktionen

$$\left\{(a-x^2)^{-1/2}T_n(x)\right\}_{n\in\mathbb{N}} =: \{\varphi_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}} \tag{4.19}$$

mit $T_n(x) = \cos(n \arccos(a^{-1}x))$ bildet ein vollständiges Orthogonalensystem in $L^2(r_3)$.

(i) Orthogonalität: Es gilt mit der Substitution $t = \arccos(a^{-1}x)$

$$\begin{aligned}
(\varphi_n, \varphi_m)_{L^2(r_3)} &= \int_{-a}^{a} T_n(x)T_m(x)(a^2 - x^2)^{-1/2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi} \cos(nt)\cos(mt)\,\mathrm{d}t \\
&= \begin{cases} \pi\,, & \text{falls } m = n = 0\,, \\ \dfrac{\pi}{2}\,, & \text{falls } m = n \neq 0\,, \\ 0\,, & \text{falls } m \neq n\,. \end{cases}
\end{aligned}$$

Mit dieser Rechnung haben wir auch gleichzeitig die Normierungsfaktoren der φ_n gefunden.

(ii) Vollständigkeit: Es sei $\varphi \in L^2(r_3)$. Wieder mit der Substitution $t = \arccos(a^{-1}x)$ erhalten wir

$$\int_{-a}^{a} |\varphi(x)|^2(a^2 - x^2)^{1/2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} a^2|\varphi(a\cos(t))|^2(\sin(t))^2\,\mathrm{d}t\,,$$

d.h. die Funktion $a\varphi(a\cos(t))\sin(t)$ ist in $L^2([0,\pi])$. Nun sei

$$(\varphi, \varphi_n)_{L^2(r_3)} = \int_{-a}^{a} \varphi(x)T_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} a\varphi(a\cos(t))\sin(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = 0$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Dies zieht sofort $\varphi \equiv 0$ nach sich, da das System $\{\cos(nt)\}_{n\in\mathbb{N}}$ vollständig in $L^2([0,\pi])$ ist ([20]).

Nun können wir jede Funktion φ im Hilbertraum $L^2(r_3)$ in eine (in diesem Raum konvergente) Fourier-Reihe

$$\varphi(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n\varphi_n(x) \tag{4.20}$$

entwickeln, wobei die Koeffizienten durch

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a} \varphi(x)\,\mathrm{d}x\,, \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_{-a}^{a} \varphi(x)T_n(x)\,, \quad n \geqslant 1\,, \tag{4.21}$$

gegeben sind. Jede Funktion $u' \in L^2(r_3)$ mit $u(-a) = u(a) = 0$ kann also als

$$u'(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \xi_n\varphi_n(x)$$

mit den Koeffizienten

$$\xi_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a} u'(x)\,\mathrm{d}x = 0\,, \quad \xi_n = \frac{2}{\pi}\int_{-a}^{a} u'(x)T_n(x)\,, \quad n \geqslant 1\,,$$

geschrieben werden. Unter Verwendung von $u(-a) = 0$ integrieren wir diese Fourier-Reihe (gliedweise Integration ist erlaubt) und bekommen

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \int_{-a}^{x} (a^2 - t^2)^{-1/2} T_n(t)\,\mathrm{d}t = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{n} \sin(n \arccos(a^{-1}x))\,,$$

wobei wieder die übliche Substitution $y = \arccos(a^{-1}t)$ benutzt wurde. Ferner setzen wir $U_n(x) = \sin(n \arccos(a^{-1}x))$ und bemerken, dass in Analogie zu den oben bewiesenen Orthogonalitätsrelationen für das System $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ die folgenden Beziehungen gelten:

$$\int_{-a}^{a} U_n(x)U_m(x)(a^2 - x^2)^{-1/2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \sin(nt)\sin(mt)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}\,, & \text{falls } m = n\,, \\ 0\,, & \text{falls } m \neq n\,. \end{cases} \tag{4.22}$$

Wir benutzen nun die Formel von Tricomi:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^{a} \frac{\varphi_n(t)}{t - x}\,\mathrm{d}t = (a^2 - x^2)^{-1/2} U_n(x)\,. \tag{4.23}$$

Da der Cauchysche singuläre Operator S stetig auf $L^2(r_3)$ ist, können wir Su' wieder durch gliedweise Integration der Fourier-Reihe berechnen. Daraus und aus (4.22) erhalten wir

$$\begin{aligned}
\langle Tu, u\rangle &= -\frac{1}{\pi} \int_{-a}^{a} u(x) \int_{-a}^{a} \frac{u'(y)}{y - x}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-a}^{a} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{\xi_m}{m} U_m(x) \xi_n \int_{-a}^{a} \frac{\varphi_n(y)}{y - x}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-a}^{a} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{\xi_n \xi_m}{m} U_n(x) U_m(x) (a^2 - x^2)^{-1/2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n^2}{n}\,.
\end{aligned}$$

Andererseits finden wir noch

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^{a} |u(x)|^2 (a^2 - x^2)^{-1/2}\,\mathrm{d}x &= \int_{-a}^{a} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{\xi_n \xi_m}{mn} U_n(x) U_m(x) (a^2 - x^2)^{-1/2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n^2}{n^2}\,.
\end{aligned}$$

Durch Vergleich der zwei vorangehenden Formeln finden wir schließlich insgesamt

$$\langle Tu, u\rangle \geqslant \int_{-a}^{a} |u(x)|^2 (a^2 - x^2)^{-1/2}\,\mathrm{d}x$$

und dies war gerade die Behauptung. ■

***Bemerkung* 4.2.3.** (i) Die im vorangehenden Beweis benutzten Elemente der Funktionensysteme $\{T_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ und $\{U_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ heißen **Tschebyscheffsche Funktionen**. Sie treten in der Theorie der Orthogonalreihen auf und bilden jeweils vollständige Orthogonalsysteme im Raum $L^2(r_0)$.

(ii) Der Ausdruck $\langle Tu, u\rangle$ ist proportional zum induzierten Luftwiderstand eines Tragflügels mit Zirkulationsverteilung u.

Vermöge Folgerung 2.1.4 haben wir die stetigen Einbettungen $M := L^2(r_0) \subset L^2 \subset L^2(r_3) =: N$. Damit zeigt das obige Theorem insbesondere die Positivität von T im Raum L^2 mit dem Sobolev-Raum

$$H_0^1 = \left\{u \in L^2 \mid u \in AC([-a,a])\ ,\ u(a) = u(-a) = 0\ ,\ u' \in L^2\right\} \tag{4.24}$$

als Defintiongebiet. Ferner erhalten wir wegen

$$\langle Tu - Tv, u - v\rangle \geqslant \int_{-a}^{a} |u(x) - v(x)|^2 r_0(x)\,\mathrm{d}x = \|u - v\|^2_{L^2(r_0)} > 0\ , \quad \text{falls } u \neq v\ ,$$

auch die strikte Monotonie von T als Operator von M in N mit dem Bereich

$$\mathcal{D}(T) = \{u \in M \mid u \in AC([-a,a])\ ,\ u(a) = u(-a) = 0\ ,\ u' \in N\} \tag{4.25}$$

sowie die Koerzivität. Es gilt der folgende

Satz 4.2.4. *Für jedes $g \in L^2(r_3)$ hat die Operatorgleichung $Sv = g$, wobei S das Cauchysche singuläre Integral bezeichnet, eine eindeutige Lösung $v \in L^2(r_3)$ mit*

$$v \in \mathcal{D}_3 := \left\{v \in L^2(r_3)\ \middle|\ \int_{-a}^{a} v(\xi)\,\mathrm{d}\xi = 0\right\}\ .$$

Die Lösung hängt stetig von g ab und ist gegeben durch

$$v(x) = -r_0(x)(S[r_3 g])(x) = (S_3 g)(x)\ . \tag{4.26}$$

Beweis. Wir zeigen, dass der Operator S_3 eine Bijektion zwischen den Räumen $L^2(r_3)$ und $\mathcal{D}_3$ vermittelt. Nach Theorem 2.2.16 gilt für $u \in L^2(r_3)$ die Formel $S_3u - r_0C = S_3S(S_3u) = S_3u$ mit

$$C = \int_{-a}^{a} (S_3u)(\xi)\,\mathrm{d}\xi\ ,$$

woraus sofort $C = 0$ folgt. Wiederum nach Theorem 2.2.16 folgt nun, dass $S_3 : L^2(r_3) \to \mathcal{D}_3$ den Operator $S : \mathcal{D}_3 \to L^2(r_3)$ invertiert, d.h. die eindeutige Lösung des Problems ist gegeben durch

$$v(x) = -(a-x)^{-1/2}(a+x)^{-1/2} \int_{-a}^{a} (a-y)^{1/2}(a+y)^{1/2} \frac{g(y)}{y-x}\,\mathrm{d}y = (S_3g)(x)$$

Nun ist S_3 beschränkt in $L^2(r_3)$ und das liefert gerade die stetige Abhängigkeit der Lösung von g. ∎

Dieser Satz garantiert nun auch die eindeutige Lösbarkeit der Gleichung $Tu = g$ in $\mathcal{D}(T)$ für jedes $g \in L^2(r_3)$. Haben wir nämlich eine eindeutige Lösung von $Sv = g$ mit verschwindendem Mittelwert, wie es uns der letzte Satz gerade garantiert, so brauchen wir lediglich noch eine eindeutige Lösung von $v = -u'$ mit den Nullrandbedingungen für u zu finden, die stetig von v abhñgt. Diese ist gegeben durch

$$u(x) = -\int_{-a}^{x} v(\xi)\, \mathrm{d}\xi \,. \tag{4.27}$$

Der verschwindende Mittelwert von v garantiert dabei gerade, dass die Nullrandbedingung für u erfüllt ist. Zusammenfassend haben wir das Folgende bewiesen:

Folgerung 4.2.5. *Für jedes $g \in L^2(r_3)$ hat die Integro-Differenzialgleichung $Tu = g$, wobei T den Prandtlschen Integro-Differenzialoperator bezeichnet, eine eindeutige Lösung $u \in \mathcal{D}(T)$ mit*

$$\mathcal{D}(T) = \{u \in M \mid u \in AC([-a,a])\,,\ u(a) = u(-a) = 0\,,\ u' \in N\}\ .$$

Die Lösung hängt stetig von g ab und ist gegeben durch

$$u(x) = -\int_{-a}^{x} (S_3 g)(\xi)\, \mathrm{d}\xi \,. \tag{4.28}$$

Aus der Monotonie von T und der obigen Folgerung lesen wir ab, dass $T : \mathcal{D}(T) \to N$ einen stetigen und einwertigen monotonen Umkehroperator besitzt. Dies zieht nach Hilfssatz 1.3.4 die maximale Monotonie von T nach sich. Nun können wir die nächste Behauptung mit Hilfe der Theorie maximal monotoner Operatoren leicht beweisen.

Theorem 4.2.6. *Sei $\varphi : [-a,a] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotone Carathéodory-Funktion mit*

$$|\varphi(x,\eta)| \leqslant A(x) + B r_0(x)|\eta| \tag{4.29}$$

für ein $A \in N$ und ein $B > 0$. Ferner sei $K : M \to M$ linear, beschränkt und positiv. Dann besitzt die Operatorgleichung

$$\Phi u + \lambda S u + K u + T u = f\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}\,, \tag{4.30}$$

mit dem Cauchyschen singulären Integral S für jedes $f \in N$ genau eine Lösung $u \in \mathcal{D}(T)$.

Beweis. Nach Theorem 4.2.2 ist $T : \mathcal{D}(T) \to N$ monoton und koerziv. Mit obigen Betrachtungen ist T auch maximal monoton. Ferner ist der Operator $E = \Phi + \lambda S + K : M \to N$ beschränkt, stetig und monoton, also ebenfalls maximal monoton. Wegen

$$\frac{\langle (E+T)u, u\rangle}{\|u\|_{L^2(r_0)}} \geqslant \frac{\langle \Phi u - \Phi 0 + \Phi 0, u\rangle}{\|u\|_{L^2(r_0)}} + \frac{\langle Tu, u\rangle}{\|u\|_{L^2(r_0)}} \geqslant -\|\Phi 0\|_{L^2(r_3)} + \frac{\langle Tu, u\rangle}{\|u\|_{L^2(r_0)}} \to \infty\,,$$

falls $\|u\|_{L^2(r_0)} \to \infty$, ist $T+E$ auch koerziv und nach dem Summensatz für maximal monotone Operatoren auch maximal monoton mit dem Bereich $\mathcal{D}(T+E)=\mathcal{D}(T)$. Nun sind koerzive, maximal monotone Operatoren, die reflexive Banachräume in ihren Dualraum abbilden, automatisch surjektiv (Theorem 1.3.11), d.h. Gleichung (4.30) besitzt eine Lösung. Die Eindeutigkeit folgt aus der oben diskutierten strikten Monotonie von T (diese folgte aus der Ungleichung von Schleiff). ■

Erfüllt die Funktion φ im vorangehenden Satz die etwas stärkere Forderung

$$|\varphi(x,\eta)| \leqslant A(x) + B|\eta| \,, \quad A \in L^2 \,, B > 0 \,, \tag{4.31}$$

und ist $K : L^2 \to L^2$ linear, beschränkt und positiv, so besitzt Gleichung (4.30) für $f \in L^2$ eine Lösung im Raum

$$\mathcal{D}_0 = \left\{ u \in L^2 \;\middle|\; u' \in AC([-a,a]) \,, u(-a) = u(a) = 0 \,, u' \in N \,, Tu \in L^2 \right\} \,,$$

denn $u \in \mathcal{D}(T)$ liegt auch in $\mathcal{D}_0$. Die Folgerung, dass dann auch Tu in L^2 liegt, trägt lediglich der Tatsache Rechnung, dass $Tu = f - \Phi u - \lambda Su - Ku \in L^2$ gilt. Zusammenfassend ist damit bewiesen:

Folgerung 4.2.7. *Sei $\phi : [-a,a] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotone Carathéodory-Funktion, die der Bedingung (4.31) genüge und der Operator K sei linear, beschränkt und positiv in L^2. Dann besitzt die Gleichung (4.30) für jedes reelle λ und jede Funktion $f \in L^2$ eine eindeutig bestimmte und absolut stetige Lösung $u \in L^2$ mit $u' \in N$, $u(-a) = u(a) = 0$ und $Tu \in L^2$.*

Wir wollen nun eine weitere Verallgemeinerung von Gleichung (4.30) behandeln, die den Differenzialoperator $A = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ auf dem Raum $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(T)$ involviert. Für $u \in \mathcal{D}(T)$ gilt auf Grund der Randbedingungen

$$\langle Au, u \rangle = \int_{-a}^{a} u'(x)u(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-a}^{a} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u(x))^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}[(u(a))^2 - (u(-a))^2] = 0 \,.$$

A und alle Vielfachen von A sind also monotone Operatoren.

Theorem 4.2.8. *Es seien die Voraussetzungen von Theorem 4.2.6 erfüllt. Dann besitzt die Gleichung*

$$\Phi u + \lambda Su + Ku - \mu Au + Tu = f \,, \quad \lambda \in \mathbb{R} \,, \tag{4.32}$$

mit dem Cauchyschen singulären Integral S, $Au = u'$ und $Tu = -Su'$ für jedes $f \in N$ eine eindeutige Lösung $u \in \mathcal{D}(T)$, falls $|\mu| < 1$.

Beweis. Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Theorem 4.2.6. Es ist zu zeigen, dass die Integrodifferenzialgleichung

$$-\mu Au + Tu = g \,, \quad |\mu| < 1 \,, \tag{4.33}$$

für jedes $g \in N$ eine eindeutige Lösung $u \in \mathcal{D}(T)$ besitzt, die stetig von g abhängt. Dazu reicht es zu zeigen, dass die Gleichung

$$\mu v + Sv = g \,, \quad |\mu| < 1 \,, \tag{4.34}$$

eine eindeutige Lösung im Raum N besitzt, die stetig von g abhängt und der zusätzlichen Bedingung

$$\int_{-a}^{a} v(x) \, \mathrm{d}x = 0 \tag{4.35}$$

genügt (u ergibt sich dann aus der Differenzialgleichung $v = -u'$ mit der Anfangsbedingung $u(-a) = 0$). Eine solche Lösung v ist für beliebiges $\mu \in \mathbb{R}$ in der Vereinigungsmenge aller L^p-Räume gegeben durch ([17]):

$$v(x) = \frac{\mu}{1+\mu^2} g(x) - \frac{1}{\pi(1+\mu^2)} (a-x)^{-\nu}(a+x)^{\nu-1} \int_{-a}^{a} (a-x)^{\nu}(a+x)^{1-\nu} \frac{g(y)}{y-x} \, \mathrm{d}y \tag{4.36}$$

mit $\mu = \cot(\pi\nu)$, $0 < \nu < 1$. Unter Beachtung von Theorem 2.2.11 suchen wir nun die Werte für ν, so dass, der singuläre Integraloperator S in der Abbildungskette

$$N = L^2(r_3) \xrightarrow{\varrho_\nu \mathbb{1}} L^2(r_3 \varrho_\nu^{-2}) \xrightarrow{S} L^2(r_3 \varrho_\nu^{-2}) \xrightarrow{\varrho_\nu^{-1}} L^2(r_3) = N$$

stetig ist und gerade die genannten Räume in sich abbildet. Nach Theorem 2.2.11 ist dafür hinreichend:

$$-1 < -2\nu + \frac{1}{2} < 1 \,, \quad -1 < 2\nu - \frac{3}{2} < 1 \,.$$

Beide Bedingungen sind erüllt, wenn

$$\frac{1}{4} < \nu < \frac{3}{4} \,,$$

was für μ gerade $-1 < \mu < 1$ bedeutet. Die absolut stetige Funktion

$$u(x) = -\int_{-a}^{x} v(\xi) \, \mathrm{d}\xi$$

ist dann gerade die eindeutige und stetig von g abhängende Lösung der Gleichung (4.33). Der Operator $-\mu A + T$ ist damit also maximal monoton und koerziv. Die Existenz und die Eindeutigkeit der Lösung von (4.32) folgt dann mit gleichen Argumententen, wie im Beweis von Theorem 4.2.6. ■

Mit den gleichen Methoden kann man auch ein analoges Resultat in den zueinander dualen Räumen $M_p := L^p(r_0)$ und $N_q := L^q(\sigma)$ mit $\sigma = r_0^{1-q}$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$ und $p > 2$ beweisen. Anders ist hier lediglich, dass der Operator T mit dem Bereich

$$\mathcal{D}_{r_0}^p(T) := \{u \in M_p \mid u \in AC([-a,a]) \,,\ u(a) = u(-a) = 0 \,,\ u' \in N_q\} \tag{4.37}$$

zwar monoton bleibt, aber nicht koerziv. Damit muss man nun eine weitere Annahme an die, den Nemickii-Operator erzeugende, Funktion φ stellen: Sie muss einen zusätzlich koerziven Operator erzeugen. Wir wollen den Beweis an dieser Stelle nicht führen, sondern verweisen auf [22].

Theorem 4.2.9. *Seien $p > 2$ und $\varphi : [-a, a] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei monotone Carathéodory-Funktion, die der Wachstumsbedingung*

$$|\varphi(x, \eta)| \leqslant A(x) + Br_0(x)|\eta|^{p-1} \tag{4.38}$$

für ein $A \in N_q$ und ein $B > 0$ und der Koerzivitätsbedingung

$$\varphi(\eta)\eta \geqslant Cr_0(x)|\eta|^p - D(x) \tag{4.39}$$

für ein $D \in L^1$ und ein $C > 0$ genügen möge. Ferner sei $K : M_p \to N_q$ linear, beschränkt und positiv. Dann besitzt die Gleichung

$$\Phi u + \lambda Su + Ku - \mu Au + Tu = f\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}\,, \tag{4.40}$$

mit dem Cauchyschen singulären Integral S, $Au = u'$ und $Tu = -Su'$ für jedes $f \in N_q$ eine eindeutige Lösung $u \in \mathcal{D}^p_{r_0}(T)$, falls $|\mu| < \tan(\pi(2q)^{-1})$.

Literaturverzeichnis

[1] Brézis, H. und Browder, F.: *Some new Results about Hammerstein Equations*. Bull. Amer. Math. Soc., 80:567–572, 1974.

[2] Brézis, H. und Browder, F.: *Nonlinear Integral Equations and Systems of Hammerstein Type*. Advances in Math., 18:115–147, 1975.

[3] Brézis, H.: *Monotonicity Methods in Hilbert Spaces and some Applications to Nonlinear Partial Differential Equations*. Contributions to Nonlinear Functional Analysis, E. Zarantonello ed. Academic Press, New York, 1971.

[4] Brézis, H.: *Équations Intégrales non linéaires du type Hammerstein*. C.R. Acad. Sc. Paris (Série A), 279:1–2, 1974.

[5] Browder, F.: *Nonlinear Maximal Monotone Operators in Banach Space*. Math. Ann., 175:89–113, 1968.

[6] Elstrodt, J.: *Maß- und Integrationstheorie*. Springer Verlag, 2005.

[7] Emmrich, E.: *Gewöhnliche und Operator-Differentialgleichungen*. Vieweg Verlag, 2004.

[8] Hammerstein, A.: *Nichtlineare Integralgleichungen Nebst Anwendungen*. Acta Math., 54:117–176, 1930.

[9] Kluge, R.: *Nichtlineare Variationsungleichungen und Extremalaufgaben*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1979.

[10] Michlin, S.G. und Prössdorf, S.: *Singuläre Integraloperatoren*. Akademie-Verlag Berlin, 1980.

[11] Muschelischwili, N.: *Singuläre Integralgleichungen*. Akademie-Verlag, Berlin, 1965.

[12] Oertl jr., H.: *Prandtl - Führer durch die Strömungslehre*. Vieweg Verlag, 2002.

[13] Rockafellar, R. T.: *Characterization of the Subdifferentials of Convex Functions*. Pacific J. Math., 17:497–510, 1966.

[14] Růžička, M.: *Nichlineare Funktionalanalysis*. Springer Verlag, 2004.

[15] SBURLAN, S. UND PASCALI, D.: *Nonlinear Mappings of Monotone Type*. Editura Academiei, Bukarest, 1978.

[16] SCHLEIFF, M.: *Untersuchung einer linearen singulären Integro-Differenzialgleichung der Tragflügeltheorie*. Wiss. Z. Univ. Halle, 17:981–1000, 1968.

[17] SCHLEIFF, M.: *Singuläre Integraloperatoren in Hilberträumen mit Gewichtsfunktion*. Math. Nachr., 42:145–155, 1969.

[18] SCHLICHTING, H. UND TRUCKENBRODT, E.: *Aerodynamik des Flugzeuges - Band 2*. Springer Verlag, Berlin, 2001.

[19] SCHRÖDER, H.: *Funktionalanalysis*. Verlag Harri Deutsch, 2000.

[20] STEIHAUS, H. UND KACZMARZ, S.: *Theorie der Orthogonalreihen*. Chelsea Publishing Company, New York, 1951.

[21] WERNER, D.: *Funktionalanalysis*. Springer Verlag, 2000.

[22] WOLFERSDORF, L. VON: *Monotonicity Methods for Nonlinear Integral and Integro-Differential Equations*. ZAMM, 63:123–124, 1983.

[23] ZEIDLER, E.: *Nonlinear Functional Analysis and its Applications III - Variational Methods and Optimization*. Springer Verlag, 1985.

[24] ZEIDLER, E.: *Nonlinear Functional Analysis and its Applications II/A - Linear Monotone Operators*. Springer Verlag, 1990.

[25] ZEIDLER, E.: *Nonlinear Functional Analysis and its Applications II/B - Nonlinear Monotone Operators*. Springer Verlag, 1990.

[26] ZYGMUND, A.: *Trigonometric Series, Vol. I und II*. Cambridge, University Press, 1959.

Selbstständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig angefertigt, nicht anderweitig zu Prüfungszwecken vorgelegt und keine anderen als die angegebenen Quellen verwendet habe. Der Literatur wörtlich oder sinngemäß entnommene Stellen sind von mir als solche gekennzeichnet worden.